

层论与概型论前置知识

叶博宇

2026 年 4 月 7 日

目录

第一章	前置知识	4
1.1	环论	4
1.2	可除群	5
1.3	域上的代数	6
1.4	交换代数中的代数	7
1.5	域	8
第二章	层论	10
2.1	预层与层的概念	10
2.2	预层与层的态射	14
2.2.1	Abel 群的预层可以构成一个 Abel 范畴	18
2.3	由 Level of Stalks 所决定的性质, Sheafification	20
2.3.1	Stalks 所决定的性质	20
2.3.2	Sheafification	22
2.3.3	Subsheaves and quotient sheaves	24
2.4	Recovering sheaves from a “sheaf on a base”	25
2.4.1	Sheaf on a base	25
2.4.2	Gluing sheaves	28
2.5	Sheaves of abelian groups, and $\mathcal{O}_X$ -modules, form abelian categories	30
2.5.1	Sheaves of abelian groups form abelian categories	30
2.5.2	$\mathcal{O}_X$ -modules	33
2.6	The inverse image sheaf	33
2.6.1	The push-pull map	34
2.6.2	The support of a sheaf, and the support of a section of a sheaf	34
2.6.3	Extension by zero, an occasional left adjoint to the inverse image functor	35
第三章	Toward schemes	36
3.1	The underlying set of an affine scheme	36
3.1.1	Spectrum of ring	36
3.1.2	Hilbert 零点定理	40
3.1.3	Quotients and localizations	42

3.1.4	Important fact: Maps of rings induce maps of spectra (as sets)	44
3.1.5	The fault of nilpotents	44
3.2	The underlying topological space of an affine scheme	44
3.2.1	Vanishing sets	44
3.2.2	Zariski 拓扑	45
3.2.3	Important fact: Maps of rings induce continuous maps of topological spaces	46
3.3	A base of the Zariski topology on $\text{Spec } A$: Distinguished open sets	48
3.4	Topological and Noetherian properties	50
3.4.1	Connectedness, irreducibility, quasicompactness	50
3.4.2	Possible topological properties of points of $\text{Spec } A$	52
3.4.3	Irreducible and connected components, and Noetherian conditions	55
3.5	The function $I(\cdot)$, taking subset of $\text{Spec } A$ to ideals of A	60
3.5.1	Beginning of a grand dictionary between algebra and geometry	62
3.6	The structure sheaf	63

第一章 前置知识

本章主要放置了一些书里默认我会但是我不熟悉或者不熟悉的知识，所以顺序非常杂乱。

1.1 环论

本小节中除特别说明以外，所以的环都默认是交换环。

定义 1.1.1 (素理想) 设 A 是一个环，如果它的理想 $\mathfrak{p} \subset A$ 满足

1. $\mathfrak{p} \neq A$.
2. 对于任意 $a, b \in A$ ，如果 $ab \in \mathfrak{p}$ ，则 $a \in \mathfrak{p}$ 或者 $b \in \mathfrak{p}$.

我们就称 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个**素理想** (*prime ideal*).

注 1.1.1 定义中的“ $ab \in \mathfrak{p}$ 则 $a \in \mathfrak{p}$ 或者 $b \in \mathfrak{p}$ ”可以改为“ $ab \notin \mathfrak{p}$ 则 $a \notin \mathfrak{p}$ 且 $b \notin \mathfrak{p}$ ”.

定义 1.1.2 设 A 是一个环。

1. 对于 $a, b \in A$ 并且 $a \neq 0$ ，我们记 $a|b$ ，如果存在 $c \in A$ 使得 $b = ac$. 即 $b \in (a)$.
2. 如果元素 $p \in A$ 使得 (p) 是一个素理想，我们就称这个 p 为 **prime element**. 或者等价定义为 p 满足：如果 $p|ab$ 则有 $p|a$ 或者 $p|b$.
3. 设 $r \in A$ 为非零元且不是 *unit*(即不存在 $t \in A$ 使得 $tr = 1$). 如果 $r = ab$ 则 a 或 b 是一个 *unit*，则称 r 为 **irreducible element**.
4. 对于 $a, b \in A$ ，如果存在某个 *unit* $u \in A^*$ 使得 $a = ub$ ，则称 a, b 是 **associated** 的.

定义 1.1.3 (主理想环) 设 A 是一个环，如果其理想 I 是由环中的一个元素生成的，则称这个理想是一个**主理想** (*principle ideal*).

如果这个环是一个整环，且环中所有的理想都是主理想，则称这个环为**主理想环** (*principle ideal domain*).

定理 1.1.1 在 PID 中，任意非零素理想都是极大理想. 由于极大理想都是素理想，所以在 PID 中，一个理想是非零素理想当且仅当它是极大理想.

定理 1.1.2 设 A 是一个交换环，那么 $A[x]$ 是 PID 当且仅当 A 是一个域.

如果有最大公因子的概念，那么可以证明 PID 中的两个元素是一定有最大公因子的.

例 1.1.1 Euclid 整环是 PID.

性质 1.1.1 1. Prime elements are always irreducible.

2. If A is a PID, then irreducible elements are always prime elements.

定义 1.1.4 (唯一分解整环) 设 A 是一个整环, 如果对于任意元素 $a \in A$, 满足分解 $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, 其中 $p_n \in A$ 为 irreducible elems, 并且该分解唯一决定于 associate, 即如果存在由 irreducible elements 的分解 $a = p'_1 \cdots p'_m$, 则 $m = n$ 并且对于任意角标 i , $p'_i = p_{\sigma(i)}$, 这里 $\sigma \in S_n$ 是一个置换.

定理 1.1.3 在 UFD 中, 元素 a 是 irreducible element 当且仅当它是 prime element.

定理 1.1.4 PID 一定是 UFD.

定理 1.1.5 设 A 是一个整环, 如果 A 是 UFD, 那么其多项式环 $A[x]$ 也是 UFD. 进一步地, $A[x_1, \dots, x_n]$ 也是 UFD.

最后给出一张比较明了的关系图.

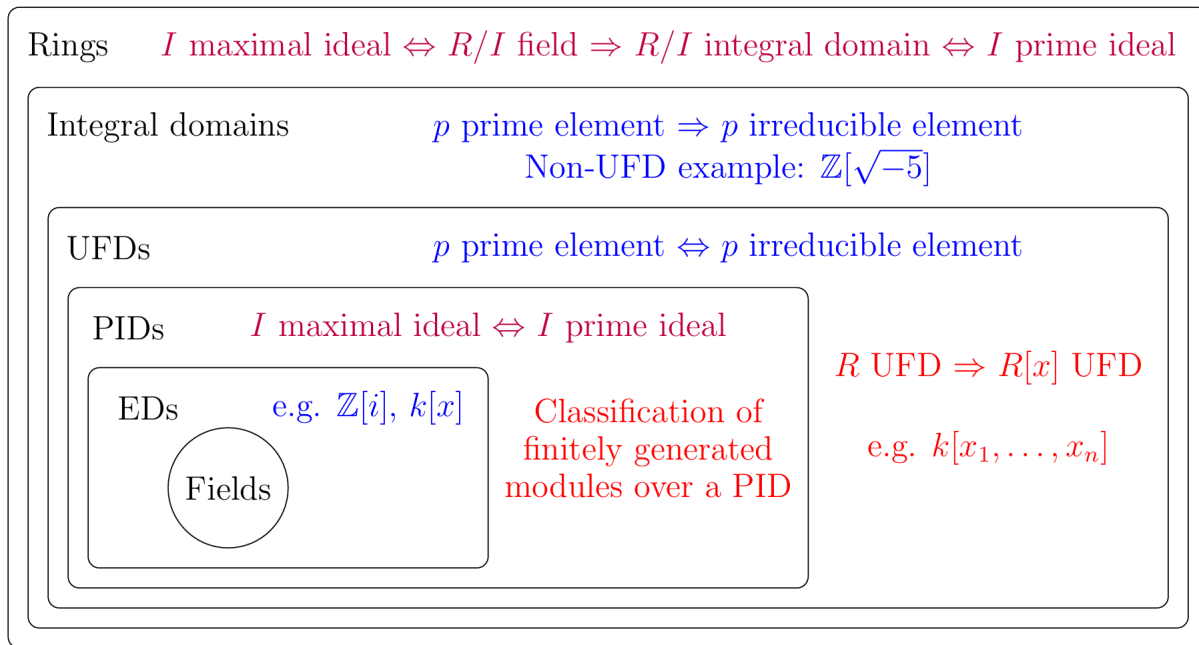


图 1.1: 各种重要环之间的关系

1.2 可除群

定义 1.2.1 设 G 关于加法 $+: G \times G \rightarrow G$ 是一个 Abel 群, 并且有乘法运算 $\cdot: \mathbb{N} \times G \rightarrow G, n \cdot g \mapsto g + \cdots + g$, 即 n 个 $g \in G$ 相加. 如果对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*, g \in G$, 都存在 $h \in G$ 使得 $g = n \cdot h$. 则称 G 为可除群 (divisible group).

注 1.2.1 其实就是一个群, 它里面的元素总能除以一个自然数.

例 1.2.1 有理数关于加法的群 $(\mathbb{Q}, +)$ 是一个可除群. 进一步地, 商群 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ 也是一个可除群, 并且有 $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的自然映射. 这个自然映射是一个单态射 (monomorphism) 但是不是一个集合论定义上的单射 (injection). 理由如下:

假设 G 也是一个可除群, 并且有 $f, g: G \rightarrow \mathbb{Q}$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ f, g \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{Q} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

设 $x \in G$, 由合成映射的相等可得 $\pi(f(x)) - \pi(g(x)) = \pi(f(x) - g(x)) = 0 + \mathbb{Z}$, 即 $f(x) - g(x) = n \in \mathbb{Z}$. 如果 $n \neq 0$, 由 G 为可除群可知存在 $y \in G$ 使得 $x = 2n \cdot y$. 于是

$$f(x) = f(2n \cdot y) = 2nf(y)$$

然后

$$f(y) = \frac{1}{2n}f(x).$$

类似的可得

$$g(y) = \frac{1}{2n}g(x).$$

相减可得

$$f(y) - g(y) = \frac{1}{2n}(f(x) - g(x)) = \frac{1}{2}$$

即存在 $y \in G$ 使得 $\pi(f(y)) \neq \pi(g(y))$, 产生了矛盾, 故 $n = 0$, 即 $f = g$, 说明 π 是一个单同态. 但是显然自然映射是一个满射.

1.3 域上的代数

定义 1.3.1 (域上的代数) 设 K 是一个域, A 为 K 上的线性空间. 如果 A 上存在二元运算 $\cdot: A \times A \rightarrow A$ 满足以下运算法则:

1. **右分配律** 对于 $x, y, z \in A$ 有 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
2. **左分配律** 对于 $x, y, z \in A$ 有 $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$.
3. 对于 $a, b \in K; x, y \in A$ 有 $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$.

则称 A 是 K 上的代数或直接记为 K -代数.

更一般地, 将 K 弱化为交换环 R , 则 ax 其实是模上的运算, 将 A 弱化为模, 于是有以下定义.

定义 1.3.2 (环上的代数) 设 R 是交换环, M 为 R -模. 如果 M 上存在二元运算 $\cdot: M \times M \rightarrow M$ 满足以下运算法则:

1. **右分配律** 对于 $x, y, z \in M$ 有 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.
2. **左分配律** 对于 $x, y, z \in M$ 有 $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$.
3. 对于 $a, b \in K; x, y \in A$ 有 $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$.

则称 M 是 R 上的代数或直接记为 R -代数.

为了定义有限生成代数, 我们需要定义结合代数. 将环上代数中的 R -模 M 强化成 R -模 A , 这里 A 是环, 并且只保留最后一条系数的运算法则.

定义 1.3.3 (结合代数) 设 R 是交换环 (也可以是域), 环 A 是 R -模, 满足环 A 上的加法和 R -模 A 上的加法一致. 并且对于 $r \in R; x, y \in A$ 有

$$r \cdot (xy) = (r \cdot x)y = x(r \cdot y).$$

则称环 A 为 R -结合代数 (*associative algebra*). 如果 A 为交换环, 则称为交换结合代数 (*commutative associative algebra*).

定义 1.3.4 (有限生成代数) 设 A 是域 K 的交换结合代数, 如果存在有限多个元素 $x_1, \dots, x_n \in A$ 使得对于任意 A 中的元素都可以 y 都可以表示为线性组合

$$y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad a_i \in K, i = 1, 2, \dots, n$$

则称 A 为有限生成代数 (*finitely generated algebra*).

1.4 交换代数中的代数

下面介绍交换代数中的代数概念, 往后多用此概念.

定义 1.4.1 (代数) 设 $f: A \rightarrow B$ 是环同态. 定义 B 为 A -模关于乘法 $ab := f(a)b$, 其中 $a \in A, b \in B$. 此时我们称环 B 连同其 A -模结构为 A -代数.

注 1.4.1 这种定义模结构的方式就是 *restriction of scalars*.

由定义可以直接看出, A -代数是环 B 连同同一个环同态 $f: A \rightarrow B$. 就是说 A -代数和环同态 $f: A \rightarrow B$ 是可以互相给出的.

例 1.4.1 设 A 是一个环. 存在环同态 $f: \mathbb{Z} \rightarrow A, z \mapsto z \cdot 1$. 于是可以定义 $\mathbb{Z}$ -模结构在 A 上, 于是 A 就是一个 $\mathbb{Z}$ -代数.

定义 1.4.2 (A -代数同态) 设 $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow C$ 是两个环同态. 于是 B, C 为 A -代数. 其 $h: B \rightarrow C$ 为 A -代数同态, 如果它是一个环同态并且还是一个模同态.

可以验证 h 是 A -代数同态当且仅当 $g = h \circ f$.

定义 1.4.3 (有限代数) 设 $f: A \rightarrow B$ 是环同态, 则 B 为 A -代数. 如果 B 是有限生成 A -模, 则称 B 为有限 A -代数 (*finite A -algebra*), 或者称 f 是有限同态.

定义 1.4.4 (有限生成代数) 设 $f: A \rightarrow B$ 是环同态. B 为 A -代数. 如果存在有限多个元素 $x_1, \dots, x_n \in B$ 使得 B 中的任意一个元素都可以由以 $x_1, \dots, x_n$ 为未定元, A 为系数的多元多项式表示 (即存在满射 $A[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow B$), 则称 B 为有限生成 A -代数 (*finite generated algebra*) 或者称 f 是有限型 (*finite type*) 的.

下面这个例子给出了有限生成代数和有限代数的区别.

例 1.4.2 设 K 是一个域, 考虑环同态 $f: K \rightarrow K[x]$ 它把 $k \in K$ 映到多项式的常数项上. 则 $K[x]$ 是 K -代数. 它作为 K -模, 其生成元为 $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ 是有无穷多个的, 故它不是一个有限 A -代数. 但是 $K[x]$ 中的任意一个元素都可以由以 x 为未定元, 以 K 中元素为系数的多项式表示, 即存在满射 $K[x] \twoheadrightarrow K[x]$, 故 $K[x]$ 是有限生成 A -代数.

其实任意有限代数都是有限生成代数, 但是有限生成代数不一定是有限代数.

有了有限代数和有限生成代数, 我们定义有限生成环.

定义 1.4.5 (有限生成环) A 为一个环, 如果它作为 $\mathbb{Z}$ -代数是有限生成的, 我们称 A 为有限生成环.

1.5 域

定义 1.5.1 设 R 为整环, $R^* = R \setminus \{0\}$. 考虑 $R \times R^*$ 上的等价关系

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad - bc = 0$$

并记以 (a, b) 为代表元的等价类为 $\frac{a}{b}$. 定义商集 $(R \times R^*) / \sim$ 上的加法与乘法运算

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

可以验证该运算可以使得 $(R \times R^*) / \sim$ 成为一个域, 并记为 $\text{Frac}(R)$. 称为分式域 (quotient field).

定义 1.5.2 (代数扩张) 设 L/K 是一个域扩张, 如果 L 中的每个元素都为 $K[x]$ 中某个非零多项式的根, 则称 L 是 K 的代数扩张 (algebraic extension).

定义 1.5.3 (超越扩张) 设 L/K 是一个域扩张, 如果 L 中的每一个元素都不是 $K[x]$ 中任意多项式的根, 则称 L 是 K 的超越扩张 (transcendental extension).

由于 L 可看作为 K 上的线性空间 V_K , 所以称 $\dim V_K$ 为超越扩张的次数 (degree).

定义 1.5.4 (极小多项式) 对于域扩张 L/K , L 中元素 α 在 K 上的极小多项式 (minimal polynomial) 为以 α 为根的 degree 次数最小的, $K[x]$ 中的首一多项式.

定义 1.5.5 (可分多项式) 对于域 K 中的多项式 $f(x) \in K[x]$ 满足在代数闭域 $\overline{K}$ 中有至少两个不同的根时, 则称该多项式是可分多项式 (separable polynomial).

定义 1.5.6 (可分扩张) 设 E/F 为域扩张, 如果对于 E 中的任意元素 α , 它在 F 上的极小多项式都是可分多项式, 则称 E 是 F 的可分扩张 (separable extension).

设 $\overline{F}$ 为 F 的 algebraic closure, 则存在唯一一个可分扩张 K^{sep} , 它包含了 $\overline{K}$ 中所有 K 的可分扩张. 我们称这个 K^{sep} 为 K 的 separable closure 它是同时是 K 的正规扩张.

定义 1.5.7 (正规扩张) 设 E/F 是代数扩张, 如果对于 E 中的任意元素 α , 它在 F 上的极小多项式都能在 E 中完全分解为形如 $c(x - a_i), a_i, c \in E$ 的乘积, 即线性因子的乘积, 则称 E 为 F 的正规扩张 (normal extension) 或 quasi-Galois extension.

定义 1.5.8 (Galois 扩张) 如果域扩张 E/F 同时是正规扩张和可分扩张, 则称其为 Galois 扩张.

定义 1.5.9 (Galois 群) 设 E/F 为 *Galois* 扩张, 则由同构构成的自同构集合

$$\text{Aut}(E/F) := \{\alpha : E \rightarrow E : \alpha \text{ 是同构且 } \alpha(x) = x, x \in F\}$$

关于映射的复合构成一个群, 称为域扩张 E/F 的 ***Galois* 群**, 记为 $G(E/F)$.

对于一个域 K , 我们称域扩张 K^{sep}/K 的 *Galois* 群 G_K 为**绝对 *Galois* 群** (*absolute Galois group*), 其中 K^{sep} 为 K 的 *separable closure*.

第二章 层论

2.1 预层与层的概念

定义 2.1.1 (预层) 设 X 是拓扑空间, *presheaves(预层) of set $\mathcal{F}$ on topological space X* 指以下内容:

1. 对于任意 X 中的开集 U , 存在集合 $\mathcal{F}(U)$. 我们称 $\mathcal{F}(U)$ 中的元素为**截面 (section)**.
2. 对于开集 $V \subset U$, 存在限制映射 $\text{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. 如果还存在开集 $W \subset V$, 则以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\text{res}_{U,W}} & \mathcal{F}(W) \\ & \searrow \text{res}_{U,V} & \nearrow \text{res}_{V,W} \\ & \mathcal{F}(V) & \end{array}$$

最后如果 $U = V$, 则 $\text{res}_{U,U} \mathcal{F}(U) = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$.

注 2.1.1 1. 借用限制映射的符号, 在不出现歧义的情况下, 我们记 $\text{res}_{U,V}(f), f \in \mathcal{F}(U)$ 为 $f|_V$.

2. 我们可以把 $\mathcal{F}(U)$ 为集合改成 *Abel 群*, 那么它就是 *sheaf of abelian group* [See in GTM52].

例 2.1.1 考虑标准拓扑 $X = \mathbb{R}^n$ 上的所有光滑函数. 对于任意的开集 $U \subset X$, 在 U 上的光滑函数关于复合与加法可以构成一个环 $\mathcal{O}_X(U)$. 如果有 $V \subset U$, 其限制映射就是光滑函数的限制, 它满足定义中的最后一个条件, 所以 $\mathcal{O}$ 是一个 *presheaf*.

定义 2.1.2 (胞与茎) 设 $\mathcal{F}$ 是一个 *presheaf on topological space X* . 对于 X 中的开集 U , 我们记 $f \in \mathcal{F}(U)$ 为一个对偶 (f, U) . 于是所有的 *section* 可以构成一个集合. 对于 X 中的一个点 p , 我们给出所有 *section* 构成的集合中的二元关系 $\sim$: 对于 (f, U) 和 (g, V) , 满足 $p \in U \cap V$. 如果存在 $W \subset (U \cap V), p \in W$ 使得

$$f|_W = g|_W$$

则称 (f, U) 和 (g, V) 满足关系 $\sim$, 并记为 $(f, U) \sim (g, V)$. 不难验证这是一个等价关系. 由 (f, U) 生成的等价类 $\overline{(f, U)}$ 称为在点 p 的**胞 (germ)**, 那么所有 *section* 构成的集合商掉这个等价关系得到的商集

$$\{(f, U) : p \in U, f \in \mathcal{F}(U)\} / \sim$$

称为 $\mathcal{F}$ 在点 p 的**茎 (stalk)**, 记为 $\mathcal{F}_p$.

注 2.1.2 *Stalk* 的等价定义为: 对于所有的 X 中的开集 U , $\mathcal{F}_p$ 是如下 *colimit*:

$$\mathcal{F}_p = \text{colim } \mathcal{F}(U).$$

例 2.1.2 延续例2.1.1, 可以找到 $\text{stalk } \mathcal{O}_p$, 并且对于任意开集 U , 可以找到 $\mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}_p$ 的映射, 即 $\mathcal{O}_p$ 是 $\mathcal{O}(U)$ 的 colimit .

定义 2.1.3 (开覆盖) 本书中的开覆盖与在拓扑学中的开覆盖稍有不同, 即把包含于符号换成了等于符号. 对于一个开集 U , 如果存在集合族 $\{U_i\}_{i \in I}$ 使得 $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, 则称该集合族为 U 的一个**开覆盖** (*open cover*).

定义 2.1.4 (层) 沿用定义2.1.1中的记号. 一个 *presheaf* $\mathcal{F}$ 如果满足以下条件:

1. **Identity Axiom:** 对于任意的开集 U , 以及开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 如果对于 $f, g \in \mathcal{F}(U)$ 有

$$f|_{U_i} = g|_{U_i}, \quad i \in I.$$

则 $f = g$.

2. **Gluability Axiom:** 对于任意的开集 U , 以及开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ 设 $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, 使得对于任意的 $i, j \in I$ 有

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$$

则存在 $f \in \mathcal{F}(U)$ 使得

$$f|_{U_i} = f_i.$$

那么我们称 $\mathcal{F}$ 为一个 **sheaf(层) of set on topological space X** .

注 2.1.3 1. 第一个公理给出了唯一性, 第二个公理给出了存在性.

2. 一些教材会额外加一条公理, 即 $\mathcal{F}(\emptyset)$ 为一个单元元素集.

例 2.1.3 延续例2.1.1, 由于光滑映射都是连续映射, 那么由连续映射的 *pasting lemma*, $\mathcal{O}$ 自然是一个层.

Germ 和 Stalk 的定义与 presheaves 的完全一致, 这里不再赘述.

例 2.1.4 如果 U, V 是不相交的开集, 那么由公理 $\mathcal{F}(\emptyset)$ 是单元元素集, 我们有

$$\mathcal{F}(U \cup V) \cong \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V).$$

我们可以把 sheaf $\mathcal{F}$ 看成是一个集合范畴上的 covariant functor. 即 $\mathcal{F} : \mathbf{Sets} \rightarrow \mathbf{Sets}, U \mapsto \mathcal{F}(U)$.

下面给出一个是 presheaf 但不是 sheaf 的一个反例.

例 2.1.5 设标准拓扑空间 $\mathbb{R}$, 再设开区间 $U = (a, b)$, 以及 $\mathcal{F}(U)$ 是由有界函数组成的集合. 它关于函数的限制是一个 *presheaf*, 但是它不是 *sheaf*, 因为函数 $y = x$ 在开区间上显然是有界的, 但是它不可以被粘合, 因为可能粘合出一个无界函数.

下面这个定义暂时不会被用到.

定义 2.1.5 (equalizer) 设 X, Y 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象, f, g 是两个从 $X \rightarrow Y$ 的态射, 如果存在对象 E 以及态射 $eq : E \rightarrow X$ 使得对于任意的对象 O 以及 $O \rightarrow X$ 使得图表交换, 则存在唯一的态射 $O \rightarrow E$ 使得整个图表交换. 我们则称 $E \rightarrow X$ 是 f, g 的 *equalizer*.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{eq} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\ & & \uparrow & & \\ & & O & & \end{array}$$

其拓扑空间构成的范畴下, 拓扑空间 X 到 Y 的映射 f, g 的 *equalizer* 定义为:

$$eq(f, g) = \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

如果有了这个定义, 则 sheaf 的定义可由一个 equalizer 正合列

$$\cdot \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

表示. 其 identity axiom 表示列在 $\mathcal{F}(U)$ 处正合. 其 gluability axiom 表示列在 $\prod \mathcal{F}(U_i)$ 处正合.

定义 2.1.6 (限制层) 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的层, 定义限制层 $\mathcal{F}|_U$, 如果对于开集 $V \subset U$, 有 $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$. 限制层是 U 上的层.

注 2.1.4 这里我们将开集 U 本身看作是一个 X 的子拓扑, 那么 V 是拓扑空间 U 的开集, 同时也是拓扑空间 X 的开集.

例 2.1.6 (Skyscraper sheaf) 设 X 是一个拓扑空间, 并且点 $p \in X$. 再设一个集合 S (它可以不是 X 的子集). 设 $i_p : \{p\} \rightarrow X$ 是一个嵌入. 然后定义 $i_{*,p}$ 为

$$i_{*,p}S(U) = \begin{cases} S, & p \in U, \\ \{e\}, & p \notin U, \end{cases}$$

其中 e 任取一个固定的元素即可. 它关于 $V \hookrightarrow U$ 的限制映射

$$\text{res}_{U,V}(u) = \begin{cases} u, & p \in V, \\ e, & p \notin V, \\ e, & p \notin V, p \in U. \end{cases}$$

构成一个 sheaf. 我们称为 *Skyscraper sheaf at p*.

定义 2.1.7 (Constant presheaves and constant sheaves) 1. 设 X 是一个拓扑空间, 再设 S 是任一集合. 定义 $\underline{S}_{pre}(U) = S$, 其中 U 是 X 的开集. 可以验证它关于限制映射为恒等映射构成一个 *presheaf*. 我们称之为 *constant presheaf associated to S*.

2. 沿用上面的记号. 设 $\mathcal{F}$ 为一个 sheaf, 再设 $\mathcal{F}(U)$ 是由 $U \rightarrow S$ 的局部常值映射, 即对于任意的 $p \in U$, 存在 p 的邻域, 映射在该邻域上是常值的. 它关于映射的限制构成一个 sheaf. 记为 $\underline{S}$, 并称为 *constant sheaf*.

注 2.1.5 1. 关于 *constant sheaf*, 一个更好的描述为: 赋予 S 离散拓扑, 然后设 $\mathcal{F}(U)$ 为连续映射构成的集合. 这在它的确是一个 sheaf 的证明上或许会有帮助.

2. 如果 $U = \emptyset, \underline{S}_{pre}(\emptyset)$ 是没有定义的. 但是会定义 $\underline{S}(\emptyset)$ 为一个固定的单点集.

3. 即使定义 $\underline{S}_{pre}(\emptyset)$ 是一个单点集, 它也一般来说也成为不了 sheaf.

例 2.1.7 (Morphisms Glue) 设 X, Y 是拓扑空间. 再设 U 是 X 中的开集, 定义集合

$$\mathcal{F}(U) = \{f : U \rightarrow Y : f \text{ 是连续映射}\}.$$

再定义 $\mathcal{F}(U)$ 到开集 $V \subset U, \mathcal{F}(V)$ 的限制映射为映射的限制. 则由 *pasting-lemma* 可以得到 $\mathcal{F}$ 是一个 X 上的 sheaf.

例 2.1.8 (The espace étalé of a (pre)sheaf) 我还没看懂，先不写。

定义 2.1.8 (sheaf 的推出或 direct image) 设 $\pi: X \rightarrow Y$ 是一个拓扑间连续映射，并且 $\mathcal{F}$ 是一个 *presheaf on X*. 然后定义 *presheaf* $\pi_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(\pi^{-1}(V))$, 其中 V 是 Y 上的一个开集. 于是由 $\mathcal{F}$ 是一个 *presheaf* 从而赋予 $\pi_*\mathcal{F}$ 是一个 *presheaf*. 我们称其为由 π 推出 $\mathcal{F}$ 或者 $\mathcal{F}$ 的 *direct image*.

例 2.1.9 (Skyscraper sheaf 作为 constant sheaf 的推出) 回忆例2.1.6, *Skyscraper sheaf* $i_{p,*}S$ 可以被视为 $i_p: \{p\} \rightarrow X$ 推出 *constant sheaf* $\underline{S}$.

一旦我们定义由层构成的范畴，我们将会看到推出是范畴之间的函子 $\mathbf{Sets}_X \rightarrow \mathbf{Sets}_Y$.

定理 2.1.1 (由推出诱导的 stalks 间的映射) 设 $\pi: X \rightarrow Y$ 是拓扑空间之间的连续映射，并设 $\mathcal{F}$ is sheaf of sets on X . 如果 $\pi(p) = q$, 则存在 stalks 之间的自然映射 $(\pi_*\mathcal{F})_q \rightarrow \mathcal{F}_p$

证明 证法一： 定义映射

$$\varphi: (\pi_*\mathcal{F})_q \rightarrow \mathcal{F}_p, \quad \overline{(g, V)} \mapsto \overline{(g, \pi^{-1}(V))},$$

其中 V 是 Y 中的开集. 由于 π 是连续映射，所以对于任意的 $q \in V$, 存在 $p \in \pi^{-1}(V)$, 即原像总是存在，故它是良定义的. 这个映射就是我们要的自然映射.

证法二： 由于 $\mathcal{F}_p = \text{colim } \mathcal{F}(U)$, U 是 X 中的开集，且 $p \in U$. 同时有 $(\pi_*\mathcal{F})(V) = \text{colim } \pi_*\mathcal{F}(V)$, V 是 Y 的开集且 $q \in V$. 我们有以下图，它对于任意的 $U_i, i \in I, p \in U_i$ 是交换的.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F}_p & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\quad \text{这个箭头可能不存在} \quad} & \mathcal{F}(U_j) \end{array}$$

再设 $\pi(U_i) = V_i, \pi(U_j) = V_j$, 则 $q \in V_i, V_j$ 并且有 $U_i \subset \pi^{-1}(V_i)$. 于是我们有以下图:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{F}_p & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\quad \text{这个箭头可能不存在} \quad} & \mathcal{F}(U_j) & & \\ \uparrow i \quad \text{res} & & \uparrow j \quad \text{res} & & \\ \mathcal{F}(\pi^{-1}(V_i)) = \pi_*\mathcal{F}(V_i) & \xrightarrow{\quad \text{这个箭头可能不存在} \quad} & \pi_*\mathcal{F}(V_j) = \mathcal{F}(\pi^{-1}(V_j)) & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & (\pi_*\mathcal{F})_q & & & \end{array}$$

考虑 $\mathcal{F}(U)$ 是由 U 为定义域的映射所构成的集合. 我们设 $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, 构造

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f_i(x), & x \in U_i, \\ e, & x \in \pi^{-1}(V_i) \setminus U_i \end{cases}$$

于是我们得到了 $i: \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \pi_* \mathcal{F}(V_i), f_i \mapsto \tilde{f}_i$. 对于 $j: \mathcal{F}(U_j) \rightarrow \pi_* \mathcal{F}(V_j)$ 的构造也类似.

由这个图可以看出 $(\pi_* \mathcal{F})_q$ 也是 $\mathcal{F}(U_i)$ 的 colimit, 由 colimit 的泛性质可以得出存在唯一的态射 $(\pi_* \mathcal{F})_q \rightarrow \mathcal{F}_p$. 同时, $\mathcal{F}_p$ 也是 $\pi_* \mathcal{F}(V_i)$ 的 colimit, 故存在唯一的态射 $\mathcal{F}_p \rightarrow (\pi_* \mathcal{F})_q$. 故存在范畴上的同构 $\mathcal{F}_p \cong (\pi_* \mathcal{F})_q$. $\square$

注 2.1.6 证法二并不够一般, 需要修改.

定义 2.1.9 (Ringed Space) 设 $\mathcal{O}_X$ 是一个 sheaf of rings on topological space X .

1. 我们称对偶 $(X, \mathcal{O}_X)$ 为 **ringed space**. Sheaf $\mathcal{O}_X$ 也被称为 **structure sheaf of ringed space**.
2. 对于开集 $U \subset X$, 我们称 $\mathcal{O}_X(U)$ 中的元素称为 **functions on U** . 并称 functions on X 为 **global function**.

注 2.1.7 这里的 function 并不是作为一个映射或者函数出现的. 如果在同一个语境中同时出现 $\mathcal{O}_X(U)$ 中的元素以及映射两个对象, 我们称前者为 function, 后者为 regular function. 记号 $\mathcal{O}_X$ 在以后默认都指 structure sheaf of ringed space X .

定义 2.1.10 ($\mathcal{O}_X$ -模) 设 $\mathcal{F}$ 是一个 sheaf of abelian groups. 并且对于任意开集 $U, \mathcal{F}(U)$ 是一个 $\mathcal{O}_X(U)$ -模, 我们就称 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{O}_X$ -模.

对于开集的嵌入 $U \hookrightarrow V$, 以下图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\text{乘法}} & \mathcal{F}(V) \\ \text{res}_{V,U} \times \text{res}_{V,U} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\ \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\text{乘法}} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

是交换的.

定理 2.1.2 如果 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个 ringed space, 并且 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathcal{O}_X$ -模, 则对于任意的 $p \in X$, 其 stalk $\mathcal{F}_p$ 也是一个 $\mathcal{O}_{X,p}$ -模.

证明 首先 $\mathcal{O}_{X,p}$ 关于自然的加法和乘法可以构成一个环. 由于 $\mathcal{F}$ 是一个 $\mathcal{O}_X$ -模, 故 $\mathcal{F}(U)$ 是一个 Abel 群, 于是我们规定 $\mathcal{F}_p$ 上的自然加法和模的乘法:

$$\begin{aligned} \overline{(f, U)} + \overline{(g, V)} &= \overline{(f + g, U \cap V)}, \quad \overline{(f, U)}, \overline{(g, V)} \in \mathcal{F}_p, \quad \text{等号后面 } f + g \text{ 中的加法是群 } \mathcal{F}(U \cap V) \text{ 上的加法.} \\ \overline{(a, A)} \cdot \overline{(f, U)} &= \overline{(af, A \cap U)}, \quad \overline{(a, A)} \in \mathcal{O}_X, \overline{(f, U)} \in \mathcal{F}_p, \quad \text{等号后面 } af \text{ 为 } \mathcal{O}_X(A \cap U) \text{ 中的乘法.} \end{aligned}$$

不难验证这个上述定义的运算时良定义的, 且我们定义的乘法满足模的定义. $\square$

2.2 预层与层的态射

定义 2.2.1 (预层之间的态射) Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are presheaves of sets (or you can change set to any orther object, such as group, rings and so on). 预层间的态射 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 为以下内容:

1. 对于任意开集 U , 存在态射 $\phi(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$.
2. 对于开集嵌入 $V \hookrightarrow U$, 图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \text{res}_{U,V} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

是交换的.

定义 2.2.2 (层之间的态射) 层之间的态射其实就是预层之间的态射. 值得注意的是, $\mathcal{O}_X$ -模之间的态射其实就是模同态 (本质上是群同态).

例 2.2.1 (遗忘映射) 考虑 $\mathbb{R}$ 以及其标准拓扑, 设 $\mathcal{F}$ 是由 $\mathbb{R}$ 上光滑函数构成的 *sheaf*, 再设 $\mathcal{G}$ 是由 $\mathbb{R}$ 上连续函数构成的 *sheaf*. 那么可以定义 $\phi: \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G}$, 满足对于任意开集 $U \subset \mathbb{R}$, $\phi(U): \mathcal{F}(U) \hookrightarrow \mathcal{G}(U)$, $f \mapsto f$. 它其实就被各个截面映到自己, 但是“遗忘”了光滑性.

下面给出一些常用的记号: presheaves of sets on topological space X 构成的范畴记为 $\mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}$; 对应的由 sheaves of sets on topological space X 构成的范畴记为 $\mathbf{Sets}_X$. 那么由 presheaves of sets on topological space X 与 sheaves of sets on topological space X 分别记为 $\mathbf{Ab}_X^{\text{pre}}, \mathbf{Ab}_X$. 由 $\mathcal{O}_X$ -模构成的范畴记为 $\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}$.

定理 2.2.1 ((预) 层之间的映射可诱导出茎之间的映射) Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are (pre)sheaves of sets on topological space X . 那么对于任意的 $p \in X$, (预) 层之间的映射 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 可以诱导出茎上的映射 $\phi_p: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$.

注 2.2.1 从范畴的角度说, 存在函子 $\mathbf{Sets}_X \rightarrow \mathbf{Sets}$, 我们称这样的函子为 *stalkification functor*.

证明 定义

$$\phi_p: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p, \quad \overline{(f, U)} \mapsto \overline{(\phi(U)(f), U)}, \quad p \in U.$$

上述映射是良定义的, 事实上, 如果存在 $(f, U) \neq (g, V)$ 而 $(f, U) \sim (g, V)$, 那么存在开集 $W \subset (U \cap V)$ 使得 $p \in W$ 且 $f|_W = g|_W$. 那么由限制映射的交换性可知

$$\phi(U)(f)|_W = \phi(W)(f|_W) = \phi(W)(g|_W) = \phi(V)(g)|_W$$

即 $(\phi(U)(f), U) \sim (\phi(V)(g), V)$. □

注 2.2.2 其实我们已经定义出了 *stalkification functor* $F: \mathbf{Sets}_X \rightarrow \mathbf{Sets}, \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_p, \phi \mapsto \phi_p$.

例 2.2.2 设 $\pi: X \rightarrow Y$ 是拓扑空间 X, Y 之间的连续映射. 考虑其 *pushforward*, 我们可以构造函数子 $\pi_*: \mathbf{Sets}_X \rightarrow \mathbf{Sets}_Y$:

$$\text{Obj}(\mathbf{Sets}_X) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{Sets}_Y), \quad \mathcal{F} \mapsto \pi_* \mathcal{F},$$

$$\text{Mor}(\mathbf{Sets}_X) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{Sets}_Y), \quad [\phi(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)] \mapsto [\phi(\pi(U)): \pi_* \mathcal{F}(\pi(U)) \rightarrow \pi_* \mathcal{G}(\pi(U))]$$

其恒等态射 $\text{id}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \text{id}(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ 于是有 $\pi_*(\text{id}) = \text{id}_{\pi_*(\mathcal{F})}$. 并且对于 $\phi': \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$, 有 $\pi_*(\phi' \circ \phi) = \pi_*(\phi) \circ \pi_*(\phi')$. 故上述函子为 *convariant* 函子.

定义 2.2.3 (Sheaf $\mathcal{H}om$) Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are (pre)sheaves of sets on topological space X . 再定义 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 满足

$$\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$

可以证明它是一个 *sheaf*, 我们称为 *sheaf $\mathcal{H}om$* .

证明 首先我们证明 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 是一个 presheaf. 显然 $\text{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ 是存在的. 然后对于开集的嵌入 $V \hookrightarrow U$, 定义限制态射

$$\text{res}_{U,V}: \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V), \quad \sigma \mapsto \sigma|_V,$$

这里 $\sigma|_V$ 是满足 $\sigma|_V(W) = \sigma(W), W \subset V$ 的态射.

再设 $W \hookrightarrow V \hookrightarrow U$ 是开集的嵌入. 容易得到下列图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(W) \\ & \searrow \quad \quad \nearrow & \\ & \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V) & \end{array}$$

是交换的.

再证明它是一个 sheaf. 设 $U \subset X$ 是一个开集, 再设 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 U 的开覆盖. 对于 identity axiom. 我们设 $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ 满足 $\sigma_1|_{U_i} = \sigma_2|_{U_i}, i \in I$.

对于任意的开集 $V \subset U$, 有

$$\sigma_1(V) : \mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{G}|_U(V) = \mathcal{G}(V).$$

对于 $\sigma_2(V) : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ 是类似的. 再设 $p \in \mathcal{F}(V), A_i = U_i \cap V$, 由

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap V) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} V \right) = U \cap V = V$$

可知 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是 V 的一个开覆盖. 再由 $\sigma_1|_{U_i} = \sigma_2|_{U_i}$ 可得 $\sigma_1|_{A_i} = \sigma_2|_{A_i}, i \in I$. 前面已经证明 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 是 presheaf, 那么由图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{G}(V) \\ \text{res}_{V, A_i} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{V, A_i} \\ \mathcal{F}(A_i) & \xrightarrow{\sigma|_{A_i}} & \mathcal{G}(A_i) \end{array}$$

的交换性可知

$$\sigma_1(V)(p)|_{A_i} = \sigma_1(A_i)(p|_{A_i}) = \sigma_1|_{A_i}(p|_{A_i}),$$

$$\sigma_2(V)(p)|_{A_i} = \sigma_2(A_i)(p|_{A_i}) = \sigma_2|_{A_i}(p|_{A_i}).$$

由于 $\sigma_1|_{A_i} = \sigma_2|_{A_i}$, 故 $\sigma_1(V)(p)|_{A_i} = \sigma_2(V)(p)|_{A_i}$ 即 $\sigma_1(V)(p) = \sigma_2(V)(p)$. 由于 $\mathcal{G}$ 是 sheaf, 故 $\sigma_1 = \sigma_2$.

最后证明 gluing axiom. 沿用前面的开覆盖符号. 我们设 $\phi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}, i \in I$ 为 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 的截面. 它满足 $\phi_i|_{U_i \cap U_j} = \phi_j|_{U_i \cap U_j}$ 我们希望能找到 ϕ 使得 $\phi|_{U_i} = \phi_i$.

对于开集 $V \subset U$, 我们按照前面的方法构造 $\{A_i\}_{i \in I}$ 作为 V 的开覆盖. 然后定义 $g_i = \phi_i|_{A_i}$ 为 $\mathcal{F}$ 的截面. 对于任意的 $\phi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$

$$\phi_i(A_i) : \mathcal{F}|_{U_i}(A_i) = \mathcal{F}(A_i) \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}(A_i) = \mathcal{G}(A_i), \quad g_i \mapsto \phi_i(A_i)(g).$$

我们记 $t_i = \phi_i(A_i)(g)$, 那么由限制态射的交换性可知

$$g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}.$$

由条件 $\phi_i|_{U_i \cap U_j} = \phi_j|_{U_i \cap U_j}$ 得 $\phi_i|_{U_i \cap U_j}(A_i \cap A_j) = \phi_j|_{U_i \cap U_j}(A_i \cap A_j)$. 这使得 $t_i|_{A_i \cap A_j} = t_j|_{A_i \cap A_j}$.

由于 $\mathcal{G}$ 是一个 sheaf, 那么我们可以找到 $t \in \mathcal{G}(V)$ 使得 $t|_{A_i} = t_i$. 然后我们定义 $\phi \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$

$$\phi(V) : \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}|_U(V) \longrightarrow \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}|_U(V),$$

我们可以将 V 换成任意 U 的子集 (且为开集).

固定 U_i , 对于开集 $T \subset U_i$, 我们有

$$\phi_i(T) : \mathcal{F}|_{U_i}(T) = \mathcal{F}(T) \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}(T) = \mathcal{G}(T).$$

设 $A'_j = T \cup U_j$ 那么 $\{A'_j\}_{j \in J}$ 为 T 的一个开覆盖. 设 q 是 $\mathcal{F}(T)$ 中的截面, 并且定义 $q_j = q|_{A'_j}, j \in J$ 显然有

$$q_j|_{A'_j \cap A'_k} = q_k|_{A'_j \cap A'_k}, \quad j, k \in J$$

由于 $\phi_j|_{U_j \cap U_k} = \phi_k|_{U_j \cap U_k}$ 故

$$\begin{aligned} \phi_j|_{U_j \cap U_k}(A'_j \cap A'_k)(q|_{A'_j \cap A'_k}) &= \phi_k|_{U_j \cap U_k}(A'_j \cap A'_k)(q|_{A'_j \cap A'_k}) \\ &\parallel \\ \phi_j|_{U_j \cap U_k}(A'_j \cap A'_k)(q)|_{A'_j \cap A'_k} &= \phi_k|_{U_j \cap U_k}(A'_j \cap A'_k)(q)|_{A'_j \cap A'_k} \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{G}$ 是一个 sheaf, 我们可以找到 $y \in \mathcal{G}(T)$ 使得 $y|_{A'_j} = \phi_j(A'_j \cap A'_k)(q)$. 于是我们定义 $\phi(T)(q) = y, \phi(T)(q)|_{A_j} = \phi_j(A'_j \cap A'_k)(q), j, k \in J$. 当 $i = j = k$ 时, 有

$$\phi(T)(q)|_{A'_i} = \phi(T)(q)|_{T \cap U_i} = \phi_i(A'_i)(q) = \phi_i(T \cap U_i)(q).$$

由于 $T \subset U_i$, 故

$$\phi(T)(q)|_{T \cap U_i} = \phi(T)(q|_{T \cap U_i}) = \phi(T)(q).$$

最后, $\phi|_{U_i}(T)(q) = \phi(T)(q) = \phi_i(T)(q)$. 故存在 ϕ 使得 $\phi|_{U_i} = \phi_i$. □

注 2.2.3 值得注意的是, $\mathcal{H}\text{om}$ 与其 stalks 是不可交换的, 即

$$\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_p \not\cong \mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}_p, \mathcal{G}_p).$$

反例如下: $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_p \rightarrow \mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}_p, \mathcal{G}_p)$ 可以不是满射.

设 $\mathcal{F}$ 是点 p 处的 skyscraper sheaf $i_{*,p}S$ of abelian group, 对于开集 U ,

$$i_{*,p}(U) = \begin{cases} S, & p \in U, \\ \{e\}, & p \notin U. \end{cases}$$

那么它在点 p 的 stalk 为

$$i_{*,p}S_p = \overline{\{(f, U) : p \in U\}}.$$

再考虑 constant sheaf $\underline{i_{*,p}S}$, 且对于开集 U , $\underline{H}(U)$ 中的映射是可加的.

如果 $p \notin V$, 其中 V 是一个开集, 那么 $\mathcal{H}\text{om}(i_{*,p}S, \underline{i_{*,p}S})(V)$ 中只有映射 $e \mapsto 0$.

如果 $p \in V'$, 则 $\mathcal{H}\text{om}(i_{*,p}S, \underline{i_{*,p}S})(V')$ 是由映射 $i_{*,p}S(V') \rightarrow \underline{i_{*,p}S}(V')$ 构成的 Abel 群. 若 $h : V' \rightarrow H$ 是非平凡的映射, 则 $h|_{V' - \{p\}} \in \underline{i_{*,p}S}(V' - \{p\})$ 也是非平凡的, 但是由交换图

$$\begin{array}{ccc} i_{*,p}S(V') & \longrightarrow & \underline{i_{*,p}S}(V') \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \text{res} \\ i_{*,p}S(V' - \{p\}) & \longrightarrow & \underline{i_{*,p}S}(V' - \{p\}) \end{array}$$

可知 $h|_{V' - \{p\}}$ 应该是平凡的, 故矛盾. 这意味着 $\mathcal{H}\text{om}(i_{*,p}S, \overline{i_{*,p}S_p})_p = \{e\}$. 但是 $\mathcal{H}\text{om}(i_{*,p}S_p, \overline{i_{*,p}S_p}) = \mathcal{H}\text{om}(i_{*,p}S_p, i_{*,p}S_p)$ 是非平凡的.

事实上, $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}_p, \mathcal{G}_p) \rightarrow \mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_p$ 也有可能不是单射.

对于 sheaf $\mathcal{H}om$, 我们还有很多略有不同的定义. 举个例子, 如果 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are sheaves of abelian groups on X . 类似地, 我们定义 $\mathcal{H}om_{\text{Ab}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \text{Mor}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$. 类似地, 如果 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{O}_X$ -模, 我们按照类似地方法定义 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. 并称 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ 为 $\mathcal{F}$ 的 **dual**.

在没有歧义的情况下, 我们通常省去 $\mathcal{H}om$ 的下标, 你需要时刻注意你在什么范畴下定义 $\mathcal{H}om$.

2.2.1 Abel 群的预层可以构成一个 Abel 范畴

我们可以用预层构造类似模的结构. 举个例子, 设 $\varphi, \psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, 其中 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上 Abel 群的预层. 我们可以由 $(\varphi + \psi)(V) = \varphi(V) + \psi(V)$ 来定义映射 $\varphi + \psi$. 那么 Abel 预层构成的范畴是一个 additive 范畴.(在本小节中, 所有预层都默指 Abel 群的预层或层)

为了进一步使这个范畴成为一个 Abel 范畴, 我们需定义 kernel.

定义 2.2.4 设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的态射, 我们定义 **presheaf kernel**: $\ker_{\text{pre}} \phi$ 使得 $(\ker_{\text{pre}} \phi)(U) = \ker \phi(U)$.

我们验证 $\ker_{\text{pre}} \phi$ 是一个预层.

证明 设 U, V 是两个开集并且 $U \hookrightarrow V$, 考虑图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & \mathcal{G}(V) \\ & & \downarrow \exists! & & \downarrow \text{res}_{V,U} & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

由于 $\ker_{\text{pre}} \phi(V) \rightarrow \mathcal{F}(V), \ker_{\text{pre}} \phi(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ 分别是 $\phi(V), \phi(U)$ 的 kernel, 以及最右边的矩形是可以交换的, 那么存在唯一的态射 $\mu: \ker_{\text{pre}} \phi(V) \rightarrow \ker_{\text{pre}} \phi(U)$. 我们把 μ 看作是 $\ker_{\text{pre}} \phi$ 上的一个 restriction.

那么如果存在 $W \hookrightarrow U \hookrightarrow V$, 考虑交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(V) & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \\ & & \downarrow \mu_1 & & \downarrow \text{res}_{V,U} & & \downarrow \text{res}_{V,U} \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(U) & \xrightarrow{i_2} & \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ & & \downarrow \mu_2 & & \downarrow \text{res}_{U,W} & & \downarrow \text{res}_{U,W} \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(W) & \xrightarrow{i_3} & \mathcal{F}(W) & \longrightarrow & \mathcal{G}(W) \end{array}$$

我们定义 $\text{res}_{V,W} = \text{res}_{U,W} \circ \text{res}_{V,U}$, 故存在唯一的态射 $\varphi: \ker_{\text{pre}} \phi(V) \rightarrow \ker_{\text{pre}} \phi(W)$. 考虑图

$$\begin{array}{ccc} \ker_{\text{pre}} \phi(V) & \xrightarrow{\varphi} & \ker_{\text{pre}} \phi(W) \\ & \searrow \mu_1 & \nearrow \mu_2 \\ & \ker_{\text{pre}} \phi(U) & \end{array}$$

设 $x \in \ker_{\text{pre}} \phi(V)$, 我们有

$$\begin{cases} i_3 \circ \varphi(x) = \text{res}_{U,W} \circ \text{res}_{V,U} \circ i_1(x), \\ i_3 \circ \mu_1 \circ \mu_2(x) = \text{res}_{U,W} \circ \text{res}_{V,U} \circ i_1(x). \end{cases}$$

故 $i_3 \circ \varphi = i_3 \circ (\mu_1 \circ \mu_2)$. 由态射的唯一性可知, $\varphi = \mu_1 \circ \mu_2$. 即上图是交换的. 最后, 由唯一性, $\ker_{\text{pre}} \phi(U) \rightarrow \ker_{\text{pre}} \phi(U)$ 是恒等态射. $\square$

类似地, 定义 **presheaf cokernel** $\text{coker}_{\text{pre}} \phi$, 它与 kernel 是 dual 的. 当然 kernel 和 cokernel 都保持着在范畴中的泛性质.

那么按照定义就可以验证处 Abel 群的 presheaf 构成的范畴是一个 Abel 范畴.

定理 2.2.2 由预层构成的列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow 0$$

是正合的当且仅当对于任意的开集 U , 列

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_1(U) \rightarrow \mathcal{F}_2(U) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_n(U) \rightarrow 0$$

是正合的.

我们马上会看到, Abel 群的层构成的范畴也是一个 Abel 范畴.

定义 2.2.5 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是两个 Abel 群的层, 再设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是层间的态射. 我们定义

$$\ker \phi := \ker_{\text{pre}} \phi.$$

这个定义其实就是在说明当预层变成层后, 其 kernel 也会从预层变成层, 证明如下:

证明 我们已经知道 $\ker_{\text{pre}} \phi$ 是一个预层, 故只需要证明 identity axiom 和 gluability axiom . 对于任意的开集 U , 以及 $\phi(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$. 设 U 的一个开覆盖 $\{U_k\}_{k \in I}$, I 为指标集, 考虑图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(U) & \xrightarrow{i(U)} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker_{\text{pre}} \phi(U_k) & \xrightarrow{i(U_k)} & \mathcal{F}(U_k) & \xrightarrow{\phi(U_k)} & \mathcal{G}(U_k). \end{array}$$

设 $x_1, x_2 \in \ker_{\text{pre}} \phi(U)$ 满足 $x_1|_{U_k} = x_2|_{U_k}, k \in I$. 那么由 $i(U_k)(x_1|_{U_k}) = i(U_k)(x_2|_{U_k})$ 可知 $i(U)(x_1)|_{U_k} = i(U)(x_2)|_{U_k}, k \in I$. 由于 $\mathcal{F}$ 是一个层, 所以 $i(U)(x_1) = i(U)(x_2)$. 由于 i 是嵌入, 所以 $x_1 = x_2$. identity axiom 得证.

再设 $x_k \in \mathcal{F}(U_k), k \in I$ 并且对于任意的 $k, j \in I$ 有 $x_k|_{U_k \cap U_j} = x_j|_{U_k \cap U_j}$. 我们有

$$i(U_k \cap U_j)(x_k|_{U_k \cap U_j}) = i(U_k \cap U_j)(x_j|_{U_k \cap U_j})$$

故

$$i(U_k)(x_k)|_{U_k \cap U_j} = i(U_j)(x_j)|_{U_k \cap U_j}$$

由于 $\mathcal{F}$ 是一个层, 所以存在 $y \in \mathcal{F}(U)$ 满足 $y|_{U_k} = i(U_k)(x_k), k \in I$. 又因为 $\phi(U_k)(y|_{U_k}) = \phi(U)(y)|_{U_k} = 0, k \in I$. 这意味着 $\phi(U)(y) = 0$. 即 $y \in \ker_{\text{pre}} \phi(U)$. 所以 gluability axiom 得证. $\square$

练习 2.2.1 考虑 $\mathbb{C}$ 及其 *classical topology*. 设 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ 是 *sheaf of holomorphic functions*, 再设 $\mathcal{F}$ 是 *presheaf of functions admitting a holomorphic logarithm*. 则有列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

其中 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X$ 是自然嵌入, $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ 为 $f \mapsto \exp(2\pi i f)$. 证明上述列是正合列, 并且 $\mathcal{F}$ 不是 *sheaf*.

2.3 由 Level of Stalks 所决定的性质, Sheafification

2.3.1 Stalks 所决定的性质

定理 2.3.1 (sections 可由 germs 所决定) 设 $\mathcal{F}$ 是一个 *sheaf of sets* (这里的 *sets* 可换为 *rings, groups*, 等任意具有加法结构的对象). 则对于任意开集 U , 存在自然单射

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p.$$

即 *sections* 由 *germs* 所决定.

证明 设

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p, \quad s \mapsto (s_p)_{p \in U},$$

其中 $s_p = \overline{(S, U)}, p \in U$ 是一个 germ. 如果 $(s_p)_{p \in U} = (s'_p)_{p \in U}$, 则对于任意的 $p \in U$, 存在 p 的邻域 $U(p) \in U$ 使得 $s|_{U(p)} = s'|_{U(p)}$. 取遍所有的 $p \in U$, 我们得到 U 的一个开覆盖 $\{U(p)\}_{p \in U}$. 由于 $\mathcal{F}$ 是 sheaf, 再加上 $s|_{U(p)} = s'|_{U(p)}$, 故 $s = s'$. 即 ϕ 是单射. $\square$

定义 2.3.1 (Compatible Germ) 设 $(s_p)_{p \in U} \in \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$, 如果存在 U 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 并且存在 $f_i \in \mathcal{F}(U_i), i \in I$ 使得对于任意的点 $q \in U_i$, f_i 在点 q 处的 germ 为 s_q , 则称 $(s_p)_{p \in U}$ 由 **compatible germs** 所构成.

其等价定义为: 对于任意的点 $p \in U$, 存在 p 的邻域 U_p , 以及 $\tilde{s}_p \in \mathcal{F}(U_p)$ 满足对于任意的 $q \in U_p$ 有 $\tilde{s}_{p_q} = s_q$, 则称 $(s_p)_{p \in U}$ 由 **compatible germs** 所构成.

例 2.3.1 设 X 为拓扑空间 $U \subset X$ 是开集, $\mathcal{F}$ 是 X 上的 sheaf. 再设 $(s_p)_{p \in U} \in \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$ 是由 compatible germs 构成的. 我们假设由三个开子集所构成的集合 $\{U_1, U_2, U_3\}$ 是 U 的开覆盖, 以及 $f_i \in \mathcal{F}(U_i), i = 1, 2, 3$ 满足对于任意的 $q \in U_i$ 有 $f_{i_q} = s_q$. 那么对于点 $q \in U$ 我们有

$$\begin{cases} f_{1_q} = s_q, & q \in U_1 \setminus (U_2 \cup U_3), \\ f_{1_q} = f_{2_q} = s_q, & q \in (U_1 \cap U_2) \setminus U_3, \\ f_{1_q} = f_{2_q} = f_{3_q} = s_q, & q \in U_1 \cap U_2 \cap U_3. \end{cases}$$

显然从 $\mathcal{F}(U)$ 中选出不同的 s , 那么由 compatible germs 构成的 $(s_p)_{p \in U}$ 就会不同. 但由下面这个定理我们知道, 这些 $(s_p)_{p \in U}$ 都是 $\mathcal{F}(U)$ 一个像.

定理 2.3.2 设 X 是拓扑空间, 再设 $\mathcal{F}$ is sheaf of sets on X 以及开集 $U \subset X$. 则任取 $\mathcal{F}(U)$ 中的 section s , 得到的 compatible germs 所构成的 $(s_p)_{p \in U} \in \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$ 都是映射

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

的像.

证明 由于 $(s_p)_{p \in U} \in \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$ 是由 compatible germs 所构成的. 由定义可知存在 U 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ 以及 $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 使得对于任意的 $q \in U_q$, 都有 $f_{i_q} = s_q$. 如果对于 $i, j \in I$ 有 $q \in U_i \cap U_j$ 那么 $f_{i_q} = f_{j_q}$. 由 germ 的定义就可以得到

$$(f_i|_{U_i \cap U_j})_q = (f_j|_{U_i \cap U_j})_q.$$

由定理2.3.1可知, 我们有单射

$$\mathcal{F}(U_i \cap U_j) \longrightarrow \prod_{p \in U_i \cap U_j} \mathcal{F}_p.$$

故 $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ 对于任意的 $i, j \in I$ 成立. 由于 $\mathcal{F}$ 是 sheaf, 故存在 $f \in \mathcal{F}(U)$ 满足对于任意的 $i \in I, f|_{U_i} = f_i$. 那么映射

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

使得

$$f \mapsto (f_p)_{p \in U} = (f_{i_p})_{p \in U} = (s_p)_{p \in U}.$$

故 $(s_p)_{p \in U}$ 为 $\mathcal{F}(U)$ 的一个像. □

由上述内容我们可以得到一个对于 sheaf 的一个理解: sheaf 就是将一些 stalks 捆在一起所得到的.

回顾定理2.2.1, 我们有以下定理.

定理 2.3.3 (同态由 Stalks 所决定) 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are sheaves of sets. 再设 ϕ_1, ϕ_2 都是 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的态射. 如果它们所诱导出的 stalk 上的映射 $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ 是相同的, 则 $\phi_1 = \phi_2$.

证明 设 ϕ_1, ϕ_2 诱导出的 stalk 上的态射都为 $\phi: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ 对于任意的开集 $U \subset X$ 考虑图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{p \in U} \mathcal{F}_p & \longrightarrow & \prod_{p \in U} \mathcal{G}_p. \end{array}$$

对于任意 $x \in \mathcal{F}(U)$, 有

$$\overline{(x, U)} \xrightarrow{\phi} \overline{(\phi_1(U)(x), U)} = \overline{(\phi_2(U)(x), U)}$$

这诱导出了

$$\prod_{p \in U} \mathcal{F}_p \rightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{G}_p, \quad (x_p)_{p \in U} \mapsto (\phi_1(U)(x)_p)_{p \in U} = (\phi_2(U)(x)_p)_{p \in U}.$$

于是我们有

$$x \mapsto \phi_1(U)(x) \mapsto (\phi_1(U)(x)_p)_{p \in U}$$

以及

$$x \mapsto \phi_2(U)(x) \mapsto (\phi_2(U)(x)_p)_{p \in U}.$$

由于自然映射 $\mathcal{G}(U) \rightarrow \prod_{p \in U} \mathcal{G}_p$ 是单射, 故 $\phi_1(U)(x) = \phi_2(U)(x)$, 即 $\phi_1 = \phi_2$. □

推论 2.3.1 Sheaves of sets 之间的态射是同构当且仅当它们在所有点诱导出的 stalks 之间的态射为同构.

注 2.3.1 我们在本小节所证明的定理以及推论对于 presheaves 一般来说都是不成立的.

2.3.2 Sheafification

所有的 sheaf 都是 presheaf(实际上 sheaves on X 构成了一个 full subcategory of the category of presheaves). 类似于 groupification, 交换半群是对群的一个好的估计. 我们也可以类似的给出, presheaf 是对 sheaf 的一个好的估计.

定义 2.3.2 (Sheafification) Let $\mathcal{F}$ is a presheaf on X . 我们称 presheaves 之间的态射 $sh: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{sh}$ 是一个 **Sheafification**, 如果 $\mathcal{F}^{sh}$ 是一个 sheaf 并且对于任意的 sheaf $\mathcal{G}$, 以及任意的 presheaf 之间的态射 $g: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, 存在唯一的态射 $f: \mathcal{F}^{sh} \rightarrow \mathcal{G}$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{sh} & \mathcal{F}^{sh} \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

是交换的.

注 2.3.2 在用到 sheafification 时, 我们都假设 sheafification 是存在的. 并且稍后会证明 presheaf 的 sheafification 总是存在的.

下面这个定理告诉我们, sheafification 是唯一的.

定理 2.3.4 若 sheafification 存在, 则 sheafification 是唯一决定于唯一同构. 进一步地, 如果 $\mathcal{F}$ 已经是一个 sheaf, 则 sheafification 为 $id: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

证明 Let $\mathcal{F}$ is a sheaf of sets on topological space X . 再设 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{sh}$ 以及 $\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}^{sh}$ 都是 $\mathcal{F}$ 的 sheafification.

由定义可知, 图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}^{sh} \\ & \searrow & \downarrow \phi_1 \\ & & \tilde{\mathcal{F}}^{sh} \\ & \searrow & \downarrow \phi_2 \\ & & \mathcal{F}^{sh} \end{array}$$

是交换的. 并且 ϕ_1, ϕ_2 都是唯一的. 由于存在恒等态射 $id_{\mathcal{F}^{sh}}: \mathcal{F}^{sh} \rightarrow \mathcal{F}^{sh}$, 故 $\phi_2 \circ \phi_1 = id$. 类似地, $id_{\tilde{\mathcal{F}}^{sh}} = \phi_1 \circ \phi_2$. 所以 $\mathcal{F}^{sh}$ 与 $\tilde{\mathcal{F}}^{sh}$ 是唯一决定于唯一同构的.

如果 $\mathcal{F}$ 已经是一个 sheaf. 那么 $id: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 显然存在. 对于任意 sheaf $\mathcal{G}$ 以及 $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, 存在唯一的同态 $f' = f$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{id} & \mathcal{F} \\ & \searrow f & \downarrow f'=f \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

是交换的. □

从更一般的角度看, sheafification 可以看作是一个从 $\mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}$ 到 $\mathbf{Sets}_X$ 的一个函子 $sh: \mathbf{Sets}_X^{\text{pre}} \rightarrow \mathbf{Sets}_X$.

性质 2.3.1 (Sheafification is a Functor) 假设 sheafification 是存在的, 则任意 presheaves 之间的态射 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 都能诱导出 sheaves 之间的映射 $\phi^{sh}: \mathcal{F}^{sh} \rightarrow \mathcal{G}^{sh}$. 进一步地, sheafification 是一个从 $\mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}$ 到 $\mathbf{Sets}_X$ 的一个函子.

证明 考虑图

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}^{\text{sh}} & \xrightarrow{\phi^{\text{sh}}} & \mathcal{G}^{\text{sh}} \\
 \uparrow \text{sh}_{\mathcal{F}} & \nearrow \text{sh}_{\mathcal{G}} \circ \phi & \uparrow \text{sh}_{\mathcal{G}} \\
 \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G}
 \end{array}$$

由定义可知, $\text{sh}_{\mathcal{G}} \circ \phi$ 是同态 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\text{sh}}$, 那么存在一个唯一的 $\varphi : \mathcal{F}^{\text{sh}} \rightarrow \mathcal{G}^{\text{sh}}$ 使得 $\varphi \circ \text{sh}_{\mathcal{F}} = \text{sh}_{\mathcal{G}} \circ \phi$. 我们定义 $\phi^{\text{sh}} = \varphi$, 它是由 ϕ 所诱导出的同态.

定义 $\text{sh} : \mathbf{Sets}_X^{\text{pre}} \rightarrow \mathbf{Sets}_X$:

$$\begin{aligned}
 \text{Obj}(\mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}) &\rightarrow \text{Obj}(\mathbf{Sets}_X), & \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}^{\text{sh}}, \\
 \text{Mor}(\mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}) &\rightarrow \text{Mor}(\mathbf{Sets}_X), & \phi &\rightarrow \phi^{\text{sh}}.
 \end{aligned}$$

我们接下来验证 sh 的确是一个函子: 如果 $\text{id} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ 是范畴 $\mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}$ 中的恒等态射, 则 $\phi^{\text{sh}} = \text{id}_{\mathcal{F}^{\text{sh}}}$ 意味着 $\text{sh}_{\text{id}_{\mathcal{F}}} = \text{id}_{\text{sh}_{\mathcal{F}}}$. 如果 $\phi_1 \circ \phi_2 : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{GH}$ 是 presheaves 的一个态射合成. 则 $\text{sh}(\phi_1 \circ \phi_2) : \mathcal{F}^{\text{sh}} \rightarrow \mathcal{H}^{\text{sh}}$ 相当于 $\text{sh}(\phi_1) \circ \text{sh}(\phi_2) : \mathcal{F}^{\text{sh}} \rightarrow \mathcal{H}^{\text{sh}}$. 故 sh 的确是一个共变函子. $\square$

注 2.3.3 对于 *presheaf of groups, rings etc.* 证明方法是相同的.

我们接下来说明, 对于任意的 presheaf of sets (or groups, rings etc.) 都存在 sheafification. 我们用 compatible germ 来构造 sheafification.

定理 2.3.5 (Sheafification 的存在性) 设 $\mathcal{F}$ 是一个 *presheaf of sets on topological space X*. 对于开集 $U \subset X$, 其 $\mathcal{F}^{\text{sh}}$ 定义为

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{\text{sh}}(U) &:= \{(f_p \in \mathcal{F}_p)_{p \in U} : \text{对于任意的 } p \in U \text{ 都存在包含 } p \text{ 的邻域 } V \subset U, \text{ 以及 } s \in \mathcal{F}(V) \\
 &\text{使得对于任意的 } q \in V \text{ 都有 } s_q = f_q\}.
 \end{aligned}$$

即 $\mathcal{F}^{\text{sh}}(U)$ 是一个由 *compatible (families of) germs* 所构成的集合.

证明 我们证明定理中的 $\mathcal{F}^{\text{sh}}$ 的确是一个 sheaf: 假设 $V \hookrightarrow U$ 是开集间的嵌入, 定义限制映射

$$\text{res}_{U,V} : \mathcal{F}^{\text{sh}}(U) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{sh}}(V), \quad (f_p)_{p \in U} \mapsto (f_p)_{p \in V},$$

其中 $(f_p)_{p \in V}$ 是由 compatible germs 构成的. 设 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 U 的一个开覆盖. 如果对于任意的 $i \in I$, $(f_p)_{p \in U|U_i} = (f'_p)_{p \in U|U_i}$. 那么 $(f_p)_{p \in U_i} = (f'_p)_{p \in U_i}$. 因此 $f_p = f'_p, p \in U_i$. 由于对于任意的 $p \in U$, 我们可以找到 U_i 使得 $p \in U_i$, 则意味着对于任意 $p \in U, f_p = f'_p$, 于是 $(f_p)_{p \in U} = (f'_p)_{p \in U}$.

设 $(f_p^i)_{p \in U_i \cap U_j} = (f_p^j)_{p \in U_i \cap U_j}$. 定义 $f_p = f_p^i, p \in U_i$. 如果对于某个 $p \in U_i$, 存在 $f_p^j, p \in U$, 则由 glueable 条件可得 $f_p^i = f_p^j, p \in U_i \cap U_j$. 所以 f_p 由 $p \in U$ 唯一决定, 即 f_p 是良定义的.

对于每一个 $U_i, i \in I$ 有

$$(f_p)_{p \in U|U_i} = (f_p)_{p \in U_i} = (f_p^i)_{p \in U_i}.$$

所以 $(f_p)_{p \in U}$ 就是由 compatible germ 所构成的. $\mathcal{F}^{\text{sh}}$ 关于前面所定义的 res 是一个 sheaf.

自然地, 如下态射就是我们所需的 sheafification:

$$\text{sh} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\text{sh}}, \quad \text{sh}(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^{\text{sh}}(U), \quad f \mapsto (f_p)_{p \in U},$$

其中 $(f_p)_{p \in U}$ 由 compatible germs 所构成.

它满足 sheafification 定义中的泛性质: 对于任意 sheaf $\mathcal{G}$. 定义 $\tilde{\phi} : \mathcal{F}^{\text{sh}}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U), (x_p)_{p \in U} \mapsto \phi(\hat{x})$, 其中 $\hat{x} \in \mathcal{F}(U)$. 由 **定理2.3.2**可知, $\hat{x}$ 满足 $\text{sh}(\hat{x}) = (x_p)_{p \in U}$. 故 $\tilde{\phi}$ 由 ϕ 唯一决定, 并且使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{sh}} & \mathcal{F}^{\text{sh}} \\ & \searrow \phi & \downarrow \tilde{\phi} \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

是交换的. □

注 2.3.4 可以证明是: *sheafification* 函子是遗忘函子 $\mathbf{Sets}_X \rightarrow \mathbf{Sets}_X^{\text{pre}}$ 的左伴随函子.

性质 2.3.2 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\text{sh}}$ 可以诱导出 stalks 之间的同构.

证明 我证明好像写错了, 先不写上来了 TT □

其实还可以证明: constant presheaf $\underline{S}_{\text{pre}}$ 的 sheafification 就是 constant sheaf $\underline{S}$.

2.3.3 Subsheaves and quotient sheaves

接下来我们将从 level of stalks 的视角来讨论 subsheaves 与 quotient sheaves.

定义 2.3.3 (Subsheaves) 设 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是 *sheaves of sets on topological space X* 之间的态射. 如果 ϕ 是 *sheaves* 所构成的范畴上的单同态, 则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$ 的 *subsheaf*.

性质 2.3.3 设 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是 *sheaves of sets on topological space X* 之间的态射. 则以下三个命题等价, 它们都可以作为 *subsheaf* 的定义:

1. ϕ 是 *sheaves* 所构成的范畴上的单同态.
2. ϕ is injective on the level of stalks: $\phi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ is injective for all $p \in X$.
3. ϕ is injective on the level of open sets: $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ is injective for all open set $U \subset X$.

证明 $2 \Rightarrow 1$. Let $\mathcal{H}$ be a sheaf of sets on topological space X ; 再设 μ, μ' 都是从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{F}$ 的同态, 且满足 $\phi \circ \mu = \phi \circ \mu'$. 记 ϕ_p 是由 ϕ 所导出的 stalks 之间的态射. 由于

$$(\phi \circ \mu)_p : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{G}_p, \quad (\overline{h, U}) \mapsto \overline{(\phi(\mu(h)), U)}, \quad p \in U.$$

以及

$$\phi_p \circ \mu_p : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p, \quad (\overline{h, U}) \mapsto \overline{(\mu(h), U)} \mapsto \overline{(\phi(\mu(h)), U)}$$

这意味着 $(\phi \circ \mu)_p = \phi_p \circ \mu_p$. 然后我们有

$$\phi_p \circ \mu_p = (\phi \circ \mu)_p = (\phi \circ \mu')_p = \phi_p \circ \mu'_p.$$

由于 ϕ_p 是单射, 故 $\mu_p = \mu'_p$. 由 **定理2.3.3**可知, $\mu = \mu'$. 我们得到 ϕ 是一个单同态.

1. $\Rightarrow$ 3. 沿用前面的几号. 对于开子集 $U \subset X$, $\phi \circ \mu(U) = \phi \circ \mu'(U)$ 使得 $\mu(U) = \mu'(U)$. 令 $\mu = \text{id}$, 再设 $x, x' \in \mathcal{F}(U)$ 满足 $\phi(U)(x) = \phi(U')(x)$. 由于 $x = \text{id}(U)(x)$, 所以 $\phi(U)(\text{id}(U)(x)) = \phi(U)(\text{id}(U)(x'))$ 使得 $x = \text{id}(U)(x) = \text{id}(U)(x') = x'$. 故 $\phi(U)$ 是单射.

3. $\Rightarrow$ 2. 设 $(x, U), (x', V) \in \mathcal{F}_p$ 满足 $\phi_p(x_p) = \phi_p(x'_p)$. 这意味着 $\overline{(\phi(U)(x), U)} = \overline{(\phi(V)(x'), V)}$. 我们可以找到一个开集 $W \subset (U \cap V), p \in W$ 使得 $\phi(U)(x)|_W = \phi(V)(x')|_W$. 由于 $\phi(W)$ 是单射, 所以 $x|_W = x'|_W$. 故 $(x, U) \sim (x', V)$, 即 $\overline{(x, U)} = \overline{(x', V)}$. $\square$

注 2.3.5 *You may later wish to extend your solution to above proposition to show that for any morphism of presheaves, if all maps to sections are injective, then all stalk maps are injective.*

Further more, if $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ is a morphism on from separated presheaf to an arbitrary presheaf, then injectivity on the level of stalks implies that ϕ is a monomorphism in the category of presheaves.

定义 2.3.4 (Quotient Sheaf) 设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是 sheaves of sets on topological space X 之间的态射. 如果 ϕ 是 sheaves 所构成的范畴上的满同态, 则称 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的 **quotient sheaf**.

性质 2.3.4 设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是 sheaves of sets on topological space X 之间的态射. 则以下命题等价, 它们都可作为 quotient sheaf 的定义:

1. ϕ 是 sheaves 所构成的范畴上的满同态.
2. ϕ is surjective on the level of stalks: $\phi_p: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ is surjective for all $p \in X$.

证明 1. $\Rightarrow$ 2. 设 $j: \{p\} \hookrightarrow X$ 是一个嵌入. 那么 stalk $\mathcal{F}_p$ 是 inverse image sheaf $j^*\mathcal{F}$. 我们知道 $j^* \dashv j_*$, 即 j^* 是 direct image 函子 j_* 的左伴随函子, 并且还是 left adjoints preserve colimits. 因此如果 ϕ 是满同态, 那么 ϕ_p 是满射.

2. $\Rightarrow$ 1. 设 ϕ_p 是满射. 设 β, γ 都是 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{H}$ 的同态且满足 $\beta \circ \phi = \gamma \circ \phi$. 于是 $\beta_p \circ \phi_p = \gamma_p \circ \phi_p$. 由于 ϕ_p 是满射, 所以 $\beta_p = \gamma_p$. 由 **定理 2.3.3** 可得 $\beta = \gamma$. $\square$

总结一下: 单同态 (monomorphism) 与满同态 (epimorphism) 分别对应了 subsheaves 与 quotient sheaves. 它们都通过 stalks 上的映射来验证 (be checked at the level of stalks).

2.4 Recovering sheaves from a “sheaf on a base”

2.4.1 Sheaf on a base

在本节中, 我们将定义基上的 sheaf, 并得到对于每个基上的 sheaf, 都可以得到一个唯一的 sheaf. 即我们可以用基上的 sheaf 来 “复原” 出一个 sheaf.

定义 2.4.1 (拓扑的基) 设 X 是一个拓扑空间, 记 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的开集族. 设开集族 $\{B_j\}_{j \in J} \subset \{U_i\}_{i \in I}$ 满足对于任意开集 U_i 都是其一些 B_j 的并, 则称 $\{B_j\}_{j \in J}$ 是拓扑空间的 X 一个 **基 (base of a topology)**.

例 2.4.1 设 $X = \mathbb{R}^n$ 为经典拓扑. 定义 **开球** $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$. 显然开球的任意并仍然是开的. 所以由所有开球构成的集合是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个基.

定义 2.4.2 (Sheaf on base) 设 X 是一个拓扑空间, $\{B_i\}_{i \in I}$ 是该拓扑空间的一个基. 称 F 是 **sheaf on base** (F is a sheaf of sets), 如果它满足:

1. 对于任意的 $B_i \in \{B_i\}_{i \in I}$ 我们有集合 $F(B_i)$.
2. 如果 $B_i \subset B_j$, 我们有限制映射 $\text{res}_{B_j, B_i} : F(B_j) \rightarrow F(B_i)$. 它满足 $\text{res}_{B_i, B_i} = \text{id}_{F(B_i)}$. 如果 $B_i \subset B_j \subset B_k$, 则图

$$\begin{array}{ccc} F(B_k) & \xrightarrow{\text{res}_{B_k, B_i}} & F(B_i) \\ & \searrow \text{res}_{B_k, B_j} \quad \nearrow \text{res}_{B_j, B_i} & \\ & F(B_j) & \end{array}$$

是交换的.

3. **base identity**: 设 $B = \cup B_i$, 如果 $f, g \in F(B)$ 满足对于任意的 i 有 $\text{res}_{B, B_i} f = \text{res}_{B, B_i} g$, 则 $f = g$.
4. **base gluability**: 设 $B = \cup B_i$, 如果对于任意的 i, j 以及 $f_i \in F(B_i), f_j \in F(B_j)$ 满足对于任意的 $B_k \subset (B_i \cap B_j)$, 都有 $\text{res}_{B_i, B_k} f_i = \text{res}_{B_j, B_k} f_j$, 则存在 $f \in F(B)$ 满足对于任意的 $i \in I$, 有 $\text{res}_{B, B_i} f = f_i$.

注 2.4.1 1. 如果 F 只满足前两条, 则称它是 **presheaf on base** $\{B_i\}$.

2. 可以把 *sheaf of sets* 改为 *sheaf of groups, rings, etc.* 只需将上述定义中的集合对应的改为群、环, 等即可.

以下定理告诉我们 Sheaf on a base 可以复原出一个 sheaf.

定理 2.4.1 设 X 是一个拓扑空间, $\{B_i\}$ 是 X 的一个基, 再设 F 是基 $\{B_i\}$ 上的 *sheaf of sets*. 那么存在一个 *sheaf of sets* $\mathcal{F}$ 满足 $\mathcal{F}(B_i) \cong F(B_i)$. 并且这个 *sheaf* 是唯一决定于唯一同构的.

证明 我们将会定义 $\mathcal{F}$ 为一个由 F 的 compatible germs 所构成的一个 sheaf.

定义 presheaf F 的 stalk 为

$$F_p = \text{colim } F(B_i), \quad p \in X,$$

其中 $\{B_i\}$ 是 X 的一个基. 我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) := \{ & (f_p \in F_p)_{p \in U} : \text{对于任意的 } p \in U \text{ 存在 } B \text{ 满足 } p \in B \subset U, \text{ 以及存在 } s \in F(B) \\ & \text{使得对于任意 } q \in B, s_q = f_q\}, \quad B \in \{B_i\}. \end{aligned}$$

由**定理2.3.5**, 我们定义的 $\mathcal{F}$ 是一个 sheaf.

接下来我们证明, $F(B) \rightarrow \mathcal{F}(B)$ 是一个同构. 考虑自然态射

$$\phi : F(B) \rightarrow \mathcal{F}(B) \subset \prod_{p \in B} F_p, \quad x \mapsto (x_p \in F_p)_{p \in B}, \quad (x_p)_{p \in B} \text{ consists of compatible germs.}$$

由**定理2.3.1**可知, ϕ 是单射. 由**定理2.3.2**可知, ϕ 是满射, 所以 ϕ 是一个同构.

此外由于 $\mathcal{F}$ 是 F 的作为 presheaf 时的一个 sheafification, 所以 $\mathcal{F}$ 唯一决定于唯一同构. 并且 $\mathcal{F}$ 和 F 的 restriction map 是相同的. $\square$

定理2.4.1像我们展示了一个拓扑空间 X 上的 sheaf $\mathcal{F}$, 即使我们不知道 $\mathcal{F}$ 在任意开集上是什么样的, 但是我们可以通过 $\mathcal{F}$ 在 X 基上的样子来复原出 $\mathcal{F}$ 本身. 自然地, 如果 sheaf $\mathcal{F}$ 与 F 在基上是同构的, 那么它们的在点 $p \in X$ 的 stalk $\mathcal{F}_p$ 与 F_p 也是同构的.

定理 2.4.2 (Sheaf 与 Sheaf on a base 的态射是一致的) 设 X 是一个拓扑空间, 且有基 $\{B_i\}_{i \in I}$. 设 F, G 为基上的 *sheaves*, 再设对于任意 $B_k \in \{B_i\}$, 有态射 $F(B_k) \rightarrow G(B_k)$. 并且如果 $B_i \subset B_j$, 则图

$$\begin{array}{ccc} F(B_i) & \longrightarrow & G(B_i) \\ \text{res}_{B_i, B_j} \downarrow & & \downarrow \text{res}_{B_i, B_j} \\ F(B_j) & \longrightarrow & G(B_j) \end{array}$$

是交换的. 那么

1. 类似**定理 2.3.3**, *sheaves* 之间的同态由 *sheaves on the base* 之间的同态所决定.
2. *Sheaves on the base* 之间的同态可以给出由 *sheaves on the base* 所决定的 *sheaves* 之间的同态.

证明 1. 我们定义 $F(B_i) := \mathcal{F}(B_i)$. 且 restriction 与 $\mathcal{F}$ 的 restriction 是一致的. 由于对于任意的开集 $U \subset X$, 都有 $U = \bigcup_j B_j$, 所以 $\{B_i\}_{i \in I}$ 的子集 $\{B_j\}$ 是 U 的一个开覆盖. 由于 $\mathcal{F}$ 是一个 sheaf, 由定义可知 F 是基 $\{B_i\}$ 上的 sheaf.

设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是 *sheaves* 之间的映射, 它诱导出映射 $\tilde{\phi}: F \rightarrow G, \tilde{\phi}(B_i) = \phi(B_i)$. 现在如果存在 ϕ_1, ϕ_2 是 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 之间的态射, 并且它们诱导出的映射 $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$. 那么对于任意的 $B_k \in \{B_i\}_{i \in I}$, 有 $\phi_1(B_k) = \phi_2(B_k)$. 于是对于任意的开集 U , 我们可以找到基的并使得 $U = \bigcup_{k \in \Gamma} B_k$. 并且使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{F}(\bigcup_{k \in \Gamma} B_k) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(\bigcup_{k \in \Gamma} B_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(B_k) & \xrightarrow{\tilde{\phi}(B_k)} & G(B_k) \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{F}(B_k) & \xrightarrow{\phi(B_k)} & \mathcal{G}(B_k) \end{array}$$

是交换的. 这说明对于任意 $x \in \mathcal{F}(U) = F(\bigcup_{k \in \Gamma} B_k)$, 有

$$\phi_1(U)(x)|_{B_k} = \phi_1(B_k)(x|_{B_k}) = \tilde{\phi}_1(B_k)(x|_{B_k}) = \tilde{\phi}_2(B_k)(x|_{B_k}) = \phi_2(B_k)(x|_{B_k}) = \phi_2(B_k)(x)|_{B_k}.$$

由于 $\{B_k\}_{k \in \Gamma}$ 是 U 的开覆盖, 所以对于任意 $k \in \Gamma$, 有 $\phi_1(U)(x)|_{B_k} = \phi_2(U)(x)|_{B_k}$. 因为 $\mathcal{G}$ 是 sheaf, 所以 $\phi_1 = \phi_2$.

2. 注意到 $\mathcal{F}(U) = \lim_{i \in \Gamma} F(B_i)$ 以及 $U = \bigcup_{i \in \Gamma} B_i$. 于是我们有态射 $F(B_k) \rightarrow G(B_k)$ 以及交换图

$$\begin{array}{ccc} & \lim_{i \in \Gamma} B_i & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ F(B_k) & \xrightarrow{\text{res}_{B_k, B_j}} & F(B_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(B_k) & \xrightarrow{\text{res}_{B_k, B_j}} & G(B_j) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & \lim_{i \in \Gamma} G(B_i) & \end{array}$$

由极限的泛性质可知，对于任意的开集 $U \subset X$ ，都存在唯一的态射

$$\mathcal{F}(U) = \lim F(B_i) \rightarrow \lim G(B_i) = \mathcal{G}(U).$$

故由 Sheaf on a base 的态射诱导出了 Sheaf 的态射. □

注 2.4.2 事实上，我们已经描述出了范畴 $\mathbf{Sets}_X$ 与 *sheaves on a base of X* 所构成的范畴之间的一个等价.

此外，对于 $\mathcal{O}_x$ -module，我们可以类似的定义 $\mathcal{O}_x$ -module on a base.

2.4.2 Gluing sheaves

如果我们已经有一些 sheaves，我们可以将其“粘合”起来，得到一个新的 sheaf.

定理 2.4.3 设 X 是一个拓扑空间，再设 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个开覆盖，并且我们有 *sheaves $\mathcal{F}_i$ on U_i* 满足态射

$$\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cup U_j} \rightarrow \mathcal{F}_j|_{U_i \cup U_j}$$

是同构，并且对于开覆盖中开集的交 $U_i \cap U_j \cap U_k$ （称条件此为 *cocycle condition*），上述同构满足

$$\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}.$$

那么我们可以将所有 $\mathcal{F}_i$ “粘合”起来，得到一个新的 *sheaf $\mathcal{F}$* ，并且它唯一决定于唯一同构. 其“粘合”的意思就是：对于任意 $U_i \in \{U_i\}_{i \in I}$ ，有同构

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i.$$

注 2.4.3 我们并没有假设开覆盖是有限的.

证明 对于任意开集 $U \subset X$ ，我们构造 $\mathcal{F}$ 满足

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i(U \cap U_i) : \forall i, j \in I, \phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j)(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i)) = \text{res}_{U \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}(f_j) \right\},$$

其中 $\text{res}^{\mathcal{F}_i}$ 是 $\mathcal{F}_i$ 的 restriction. 换句话说， f_i 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} f_i & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & f_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_i(U \cap U_i) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathcal{F}_j(U \cap U_j) \\ \downarrow \text{res}^{\mathcal{F}_i} & & \downarrow \text{res}^{\mathcal{F}_j} \\ \mathcal{F}_i(U \cap U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\phi_{ij}} & \mathcal{F}_j(U \cap U_i \cap U_j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j)(\text{res}_{U \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}(f_j)). \end{array}$$

我们验证 $\mathcal{F}(U)$ 是良定义的: 对于 $U \cap U_i \cap U_j \cap U_k; i, k, j \in I$, 我们将 $\text{res}^{\mathcal{F}_i}$ 作用在等式 $\phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j)(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i)) = \text{res}_{U \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_j)$ 上, 再通过 restriction 和态射之间的交换性就可以得到等式

$$\begin{aligned} & \text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_i}[\phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j)(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i))] \\ &= \phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j \cap U_k)[\text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_i}(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i))] \\ &= \phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j \cap U_k)[\text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_i}(f_i)] \\ &= \text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_j}(f_j) = \text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_j}[\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}(f_j)]. \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned} & \phi_{jk}(U \cap U_i \cap U_j \cap U_k)[\phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j \cap U_k)(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_i}(f_i))] \\ &= \phi_{jk}(U \cap U_i \cap U_j \cap U_k)[\text{res}_{U \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_j}(f_j)] = \text{res}_{U \cap U_k, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_k}(f_k) \\ &= \phi_{ik}(U \cap U_i \cap U_j \cap U_k)[\text{res}_{U \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j \cap U_k}^{\mathcal{F}_i}(f_j)]. \end{aligned}$$

这说明对于 $U_i \cap U_j \cap U_k$, 其 $\mathcal{F}(U)$ 满足 cocycle condition $\phi_{ik} = \phi_{jk} \circ \phi_{ij}$, 故 $\mathcal{F}(U)$ 是良定义的.

接下来定义 $\mathcal{F}$ 的 restriction: 设开集的嵌入 $V \hookrightarrow U$. 定义

$$\text{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V), \quad \text{res}_{U,V}((f_i)_{i \in I}) = (\text{res}_{U \cap U_i, V \cap U_i}^{\mathcal{F}_i}(f_i))_{i \in I}.$$

由 $f_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ 可知, $\text{res}_{U \cap U_i, V \cap U_i}^{\mathcal{F}_i}(f_i) \in \mathcal{F}(V \cap U_i)$. 并且我们有

$$\begin{aligned} & \phi_{ij}(V \cap U_i \cap U_j)[\text{res}_{V \cap U_i, V \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(\text{res}_{U \cap U_i, V \cap U_i}^{\mathcal{F}_i}(f_i))] \\ &= \phi_{ij}(V \cap U_i \cap U_j)[\text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, V \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i))] \\ &= \text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, V \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}[\phi_{ij}(U \cap U_i \cap U_j)(\text{res}_{U \cap U_i, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i))] \\ &= \text{res}_{U \cap U_i \cap U_j, V \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}[\text{res}_{U \cap U_j, U \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}(f_j)] \\ &= \text{res}_{V \cap U_j, V \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}[\text{res}_{U \cap U_j, V \cap U_j}^{\mathcal{F}_j}(f_j)]. \end{aligned}$$

这说明 $\text{res}_{U,V}((f_i)_{i \in I}) \in \mathcal{F}(V)$ 是良定义的. 由于 $\mathcal{F}_i$ 是 sheaf, 所以我们定义在 $\mathcal{F}$ 上的 restriction 也满足其交换性与恒等性. 故 $\mathcal{F}$ 是一个 presheaf.

接下来验证 identity axiom: 设 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 U 的一个开覆盖, 并且有 $(f_i)_{i \in I}|_{V_\alpha} = (f'_i)_{i \in I}|_{V_\alpha}, \alpha \in A$. 那么有

$$\text{res}_{U \cap U_i, V_\alpha \cap U_i}^{\mathcal{F}_i}(f_i) = \text{res}_{U \cap U_i, V_\alpha \cap U_i}^{\mathcal{F}_i}(f'_i).$$

因为 $\mathcal{F}_i$ 是一个 sheaf, 所以对于任意的 $i \in I$, 有 $f_i = f'_i$, 故 $(f_i)_{i \in I} = (f'_i)_{i \in I}$.

接下来验证 gluability axiom: 设 $\{V_a\}_{a \in A}$ 是 U 的一个开覆盖, 并且对于 $(f_i^a)_{i \in I} \in \mathcal{F}(V_a)$ 我们有 $(f_i^a)_{i \in I}|_{V_a \cap V_b} = (f_i^b)_{i \in I}|_{V_a \cap V_b}; a, b \in A$. 由于 $U \cap U_i = \bigcup_{a \in A} (V_a \cap U_i)$ 构成了 $U \cap U_i$ 的一个开覆盖. 那么对于任意的 $i \in I$, 我们有

$$\text{res}_{V_a \cap U_i, V_a \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i^a) = \text{res}_{V_b \cap U_i, V_b \cap U_i \cap U_j}^{\mathcal{F}_i}(f_i^b).$$

因为 $\mathcal{F}_i$ 是 sheaf, 所以我们可以找到 $f_i \in \mathcal{F}_i(U \cap U_i)$ 使得对于任意 $a \in A$ 有 $\text{res}_{U \cap U_i, V_a \cap U_i}(f_i) = f_i^a$. 我们把这些元素做 product, 就得到了 $(f_i)_{i \in I}$, 它满足 $(f_i)_{i \in I}|_{V_a} = (f_i^a)_{i \in I}$. 显然 $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{F}(U)$.

再验证 $\mathcal{F}|_{U_h} \cong \mathcal{F}_h, h \in I$: 我们定义 sheaves 之间的同态 $\psi_h : \mathcal{F}|_{U_h} \rightarrow \mathcal{F}_h$ 为

$$\psi_h(V) : \mathcal{F}|_{U_h}(V) \rightarrow \mathcal{F}_h(V), \quad (s_i)_{i \in I} \mapsto s_h \in \mathcal{F}_h(V \cap U_h) = \mathcal{F}_h(V).$$

可以找到 $\psi_h(V)$ 的逆为

$$\beta_h(V) : \mathcal{F}_h(V) \rightarrow \mathcal{F}|_{U_h}(V), \quad \beta(V)(t) = (\phi_{hi}(V \cap U_i)(\text{res}_{V, V \cap U_i}^{\mathcal{F}_h}(t)))_{i \in I} \in \mathcal{F}|_{U_h}(V) = \mathcal{F}(V), \quad t \in \mathcal{F}_h(V)$$

由此可以得到 ϕ_h 的逆 β_h , 故 ψ_h 是一个同构.

最后验证 $\mathcal{F}$ 同构于唯一同构: 设 $\mathcal{G}$ 也满足 $\mathcal{G}|_{U_i} \cong F_i$, 我们记这个同构为 τ_i , 并且在开集的交 $U_i \cap U_j$ 上有 $\tau_j = \phi_{ij} \circ \tau_i$. 再设 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 以及 $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 为 sheaves of local morphisms. 设 $f_i \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_i)$, $g_i \in \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F})(U_i)$. 由于 τ_i, ψ_i 是同构, 所以 $f_i = \tau_i^{-1} \circ \psi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ 也是同构.

同时通过 f_i 的定义注意到 $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ 那么我可以找到一个唯一的 $f \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ 使得 $f|_{U_i} = f_i$. 同理我们可以找到 $g \in \mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{F})(U)$ 使得 $g|_{U_i} = g_i$. 由于 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ 以及 $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ 都是 sheaf. 并且对于任意 $i \in I$, 有 $f \circ g$ 是 $\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ 的 section, $g \circ f$ 是 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ 的 section, 所以 $(f \circ g)|_{U_i} = f_i \circ g_i = \text{id}_{\mathcal{F}|_{U_i}}$, $(g \circ f)|_{U_i} = g_i \circ f_i = \text{id}_{\mathcal{G}|_{U_i}}$. 这意味着 $f \circ g = \text{id}_{\mathcal{F}}$, $g \circ f = \text{id}_{\mathcal{G}}$ 即 $\mathcal{G} \cong \mathcal{F}$. $\square$

注 2.4.4 可以由 *cocycle condition* 得到 ϕ_{ii} 是 identity.

2.5 Sheaves of abelian groups, and $\mathcal{O}_X$ -modules, form abelian categories

2.5.1 Sheaves of abelian groups form abelian categories

在本节我们将会讨论 sheaves of abelian groups, 以及它的孪生兄弟 $\mathcal{O}_X$ -modules. 它们都可以构成 abelian categories. 换句话说, 我们可以像向量空间以及环上的模一样对待它们. 不过在此之前, 我们先讨论 kernel, cokernel 以及 exactness. 并且对于 sheaves of abelian groups, 我们会从 stalks 的角度来讨论 kernel, cokernel 以及 exactness.

我们已经知道, sheaves of abelian groups on a topological space X 以及是 additive category 了. 所以我如果想要证明它能构成 abelian category, 我们只需要证明任意 sheaves 之间的态射有 kernel 以及 cokernel. 由定义 2.2.5 可知, sheaves 之间的态射有 kernel, 并且 presheaf kernel 就是一个 sheaf, 并且它是 category of sheaves 中的 kernel.

定理 2.5.1 *Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are sheaves of abelian groups on X . 那么 kernel 的 stalk 就是 stalks 之间态射的 kernel, 即对于任意 $p \in X$*

$$(\ker(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}))_p \cong \ker(\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p).$$

证明 设 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, $\phi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$, $p \in X$ 考虑两条列

$$\ker \phi \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$$

$$(\ker \phi)_p \longrightarrow \mathcal{F}_p \xrightarrow{\phi_p} \mathcal{G}_p$$

之间的态射

$$\begin{array}{ccccc} \ker \phi & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\ker \phi)_p & \longrightarrow & \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\phi_p} & \mathcal{G}_p \end{array}$$

我们要证明, $(\ker \phi)_p$ 是 ϕ_p 的 kernel. 由于有图

$$\begin{array}{ccccc} \ker \phi & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 0 & & \end{array}$$

所以有图

$$\begin{array}{ccccc} (\ker \phi)_p & \longrightarrow & \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\phi_p} & \mathcal{G}_p \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & 0 & & \end{array}$$

这说明 $(\ker \phi)_p \subset \ker \phi_p$. 再设 $x_p \in \ker \phi_p$, 那么 $\phi_p(x_p) = 0$. 则存在 p 的邻域 U 使得 x_p 是 x 在点 p 处的 stalk. 那么 $(\phi(U)(x))_p = \phi_p(x_p) = 0$. 这说明存在开集 V 满足 $x \in V \subset U$, 使得 $\phi(U)(x)|_V = 0$. 立即有 $\phi(V)(x|_V) = 0, x|_V \in \ker(\phi(V))$. 故 $(x|_V)_p = x_p \in (\ker \phi)_p$. 我们得到 $(\ker \phi)_p \supset \ker \phi_p$ 最终 $(\ker \phi)_p = \ker \phi_p$. $\square$

通过类似的证法, 我们可以对 cokernel 得到同样的结论.

推论 2.5.1 *The stalk of cokernel is naturally isomorphic to the cokernel of the stalk.*

我们接下来简单探讨一下态射的 cokernel. 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是 sheaves, 再设 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 在由 presheaves 所构成的范畴中有 cokernel, 记为 $\mathcal{H}_{\text{pre}}$. 再设 $\text{sh} : \mathcal{H}_{\text{pre}} \rightarrow \mathcal{H}$ 是 sheafification. 回忆 cokernel 定义的泛性质, 我们有关于 colimit 的图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \\ 0 & & \end{array}$$

下面这个命题告诉我们, presheaves 之间态射的 cokernel 可以升级成 sheaves 之间的 cokernel.

性质 2.5.1 存在唯一态射 (它其实合成态射得到的) $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 是 $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 在 sheaves 构成范畴上的 cokernel.

证明 首先我们证明它满足泛性质: 对于任意 sheaf $\mathcal{E}$, 以及交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} \end{array}$$

我们构造

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_{\text{pre}} & \xrightarrow{\text{sh}} & \mathcal{H} \\ & & & \nearrow & \\ & & & \mathcal{E} & \end{array}$$

我们证明存在唯一的态射 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}$ 使得上述图是交换的. 由于 $\mathcal{H}_{\text{pre}}$ 是 presheaves 中的 cokernel, 故存在一个唯一的态射 $\mathcal{H}_{\text{pre}} \rightarrow \mathcal{E}$. 由 sheafification 的泛性质可知, 存在唯一的 sheaves 之间的态射 $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}$ 使得上述图交换. $\square$

我们目前已经定义了 kernel 和 cokernel 的记号, 并且说明我们可以在 stalks 的层面来判断一个态射是否为 kernel 或者 cokernel. 此外我们还验证了态射是否为单态射或者满态射也可以通过 stalks 来判断. 于是我们有以下定理, 它说明 sheaves of abelian groups 可以构成一个 abelian category.

定理 2.5.2 *Sheaves of abelian groups on a topological space X form an abelian category.*

不难发现, 大部分 sheaves 上性质的证明都可以转换为 stalks 上性质的证明 (一个理由是 stalk 也是 Abel 群). 并且 sheaf 上的性质与 stalk 的性质会在大多数情况下保持一致.

例 2.5.1 Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ are sheaves of abelian groups. 再设 $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是二者之间态射, 则 *image sheaf* $\text{im } \phi$ (这里的 *image* 指 *abelian category* 的 *images*) 是其 *image presheaf* 的 *sheafification*. 并且 *image* 的 *stalk* 是 *stalk* 的 *image*.

证明 记 $\text{im}_{\text{pre}} \phi$ 是 *image presheaf*, 再设对于 sheaf T , 有 $t: \text{im}_{\text{pre}} \phi \rightarrow T, g: \text{im } \phi \rightarrow T$ 由于 $\ker_{\text{pre}} \phi$ 与 $\text{coker}_{\text{pre}} \phi$ 实际上也是 sheaves. 故 $t = g$, 这意味着 g 是唯一的, 并且有 $\text{sh} = \text{id}$. 故 $\text{im } \phi$ 是 $\text{im}_{\text{pre}} \phi = \text{im } \phi$ 的 *sheafification*.

由于

$$(\ker \phi)_p = \ker \phi_p, \quad (\text{coker } \phi)_p = \text{coker } \phi_p$$

所以

$$(\text{im } \phi)_p = [\ker(\text{coker } \phi)]_p = \ker[(\text{coker } \phi)_p] = \ker(\text{coker } \phi_p) = \text{im } \phi_p.$$

□

Sheaves 之间构成态射的列的正合性也可由 stalks 之间态射的正合所验证.

定理 2.5.3 Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ are sheaves of abelian groups on X . 再设 $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}, \beta: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 为态射. 那么列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

是正合的, 当且仅当 *stalks* 之间的态射所构成的列

$$\mathcal{F}_p \xrightarrow{\alpha_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathcal{H}_p$$

是正合的, 其中 α_p, β_p 分别是由 α, β 所诱导出的.

推论 2.5.2 设 X 为拓扑空间, $p \in X$, 则 $F: \text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}, \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_p, \phi \rightarrow \phi_p$ 是正合函子.

关于左正合列, 则我们还有如下定理.

定理 2.5.4 (Left-exactness of the functor of “sections over U ”) 设 X 是拓扑空间, $U \subset X$ 为开集, 并且 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 是 *sheaves of abelian groups on X* 所构成的正合列. 则

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U)$$

是正合列.

证明 利用 *sheafification* 的右伴随遗忘函子. □

注 2.5.1 注意: 如果 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ 是正合列, 则 $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$ 不一定是正合列.

定理 2.5.5 (Left-exactness of pushforward) 设 X 是拓扑空间, $U \subset X$ 为开集, 并且 $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ 是 *sheaves of abelian groups on X* 所构成的正合列. 再设 $\pi: X \rightarrow Y$ 为连续映射. 则由推出构成的列

$$0 \rightarrow \pi_* \mathcal{F} \rightarrow \pi_* \mathcal{G} \rightarrow \pi_* \mathcal{H}$$

也是正合的.

定理 2.5.6 (Left-exactness of Hom) Supports $\mathcal{F}$ is sheaf of abelian groups on a topological space X . Then $\mathcal{H}\text{om}(\mathcal{F}, \cdot)$ is a left-exact covariant functor $\text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}_X$. Besides $\mathcal{H}\text{om}(\cdot, \mathcal{F})$ is a left-exact contravariant functor $\text{Ab}_X \rightarrow \text{Ab}_X$.

2.5.2 $\mathcal{O}_X$ -modules

本小节主要给出 $\mathcal{O}_X$ -模的张量积. 但在这之前, 我们先给出如下定理, 它说明 $\mathcal{O}_X$ -模是可以构成 abelian category 的.

定理 2.5.7 如果 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是一个 *ringed space*, 则 $\mathcal{O}_X$ -模可以构成一个 *abelian category*.

证明 这个证明和之前证明 abelian category 的构成思路是一样的, 就不重复写了. $\square$

定义 2.5.1 ($\mathcal{O}_X$ -模的张量积) Let $\mathcal{O}_X$ is a sheaf of rings on X . 再设 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$. 于是对于任意开集 $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ 和 $\mathcal{G}(U)$ 都是 $\mathcal{O}_X(U)$ -模. 我们定义 *sheaf* $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ 在每个开集上 U 为 $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) := \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. 并称 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ 为 $\mathcal{O}_X$ -模 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 的 **张量积** (*tensor product*).

由定义马上可以得出, 对于任意的 $\mathcal{O}_X$ -模 T . 若存在双线性映射 $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{F} \rightarrow T$, 则存在唯一的双线性映射 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \rightarrow T$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \times \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & T \end{array}$$

是交换的.

定理 2.5.8 *stalks* 的张量积是张量积的 *stalk*.

证明 由于 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{O}_X$ -模, 则对于点 $p \in X$, $\mathcal{F}_p, \mathcal{G}_p$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ -模. 那么 $\mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{G}_p$ 是 $\mathcal{O}_{X,p}$ -模的张量积. 于是我们可以构造同构映射

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})_p \rightarrow \mathcal{F}_p \otimes \mathcal{G}_p, \quad (f \otimes g)_p \mapsto f_p \otimes g_p.$$

$\square$

2.6 The inverse image sheaf

回忆 2.1.8, 我们知道对于拓扑空间 X, Y 以及连续映射 $\pi : X \rightarrow Y$, 对于 X 上的 sheaf $\mathcal{F}$, 我们可以得到其 direct image $\pi_* \mathcal{F}$. 它是 Y 上的 sheaf. 那么对于 Y 上的 sheaf $\mathcal{G}$, 我们类似的可以给出 inverse image. 我们先给出抽象的 inverse image 的定义, 即用左伴随函子来定义.

定义 2.6.1 设 X, Y 是拓扑空间, 再设 π_* 是从 *sheaves on X* 到 *sheaves on Y* 的函子. 我们定义 π^{-1} 作为 π_* 的左伴随函子, 并称其为 π_* 的 *inverse image*.

我们需要证明的是, π_* 的左伴随函子是存在的, 不然上面这个定义是没有意义的

证明 注意到我们有 canonical maps $\pi^{-1} \pi_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, \mathcal{G} \rightarrow \pi_* \pi^{-1} \mathcal{G}$ 二者分别 associated to the identity in $\text{Mor}_Y(\pi_* \mathcal{F}, \pi_* \mathcal{F}), \text{Mor}_X(\pi^{-1} \mathcal{G}, \pi^{-1} \mathcal{G})$. 并且有图

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1} \mathcal{G} & \longrightarrow \mathcal{F} \\ & \nearrow & \nearrow \\ X & & \\ \downarrow \pi & \mathcal{G} & \longrightarrow \pi_* \mathcal{F} \\ Y & & \end{array}$$

我们再定义一个临时的记号

$$\pi_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G}(U) = \text{colim}_{V \supset \pi(U)} \mathcal{G}(V).$$

再定义 **inverse image of $\mathcal{G}$** 为 $\pi^{-1}\mathcal{G} := (\pi_{\text{pre}}^{-1}\mathcal{G})^{\text{sh}}$. 注意到 π^{-1} 是从 Y 上的 sheaves 所构成的范畴到 X 上的 sheaves 所构成范畴的函子. 然后我们可以得到同构

$$\text{Mor}_X(\pi^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Mor}_Y(\mathcal{G}, \pi_*\mathcal{F})$$

并得到 (π^{-1}, π_*) 是伴随的. 故 π^{-1} 是左伴随 π_* 的. □

注 2.6.1 我们常用证明中那个 *sheafification* 作为 *inverse image of $\mathcal{G}$* 的定义.

性质 2.6.1 设 $\pi: X \rightarrow Y$ 是拓扑空间之间的连续映射, 再设 $\mathcal{G}$ 是 Y 上的 *sheaf*. 对于 $p \in X$, 设 $\pi(p) = q$, 则

$$\mathcal{G}_q \cong (\pi^{-1}\mathcal{G})_p.$$

即 $\pi^{-1}\mathcal{G}$ 的 *stalks* 和 $\mathcal{G}$ 的 *stalk* 是一样的.

性质 2.6.2 设 U 是 Y 的开集, 再设 $i: U \hookrightarrow Y$ 是一个嵌入. 再设 $\mathcal{G}$ 是 Y 上的一个 *sheaf*. 则自然地有 $i^{-1}\mathcal{G} \cong \mathcal{G}|_U$.

性质 2.6.3 π^{-1} is an exact functor from sheaves of abelian groups on Y to sheaves of abelian groups on X .

2.6.1 The push-pull map

定义 2.6.2 (push-pull map) 设 X, Y, W, Z 为拓扑空间, 并且它们之间的连续映射构成交换图 (不一定是 *Cartesian* 的)

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\beta'} & X \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \alpha \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Z \end{array}$$

再设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的 *sheaf*. 我们定义 **push-pull map of sheaves on Y** 为

$$\beta^{-1}\alpha_*\mathcal{F} \longrightarrow \alpha'_*(\beta')^{-1}\mathcal{F}. \quad (2.6.1)$$

可以简单说一下是如何得到(2.6.1)的: 从 W 上 sheaves 之间的恒等态射 $(\beta')^{-1}\mathcal{F} \rightarrow (\beta')^{-1}\mathcal{F}$ 开始, 由 $((\beta')^{-1}, \beta'_*)$ 的伴随性可以得到 X 上 sheaves 之间的态射 $\mathcal{F} \rightarrow (\beta'_*)(\beta')^{-1}\mathcal{F}$. 再将 α_* 作用上去得到 Z 上 sheaves 之间的态射 $\alpha_*\mathcal{F} \rightarrow \alpha_*(\beta'_*)(\beta')^{-1}\mathcal{F}$. 再由上述定义中图的交换性可得映射 $\alpha_*\mathcal{F} \rightarrow (\beta_*)(\alpha'_*)(\beta')^{-1}\mathcal{F}$. 最后由 (β^{-1}, β_*) 的伴随性得到(2.6.1).

2.6.2 The support of a sheaf, and the support of a section of a sheaf

定义 2.6.3 (Support of the section) Suppose $\mathcal{F}$ is a sheaf of abelian groups on X , and s is a global section of $\mathcal{F}$. Define the **support of the section s** , denoted $\text{Supp } s$, to be the set of points p of X where s has a nonzero germ:

$$\text{Supp } s := \{p \in X : s_p \neq 0 \text{ in } \mathcal{F}_p\}.$$

这个子集可以看作是由 s 的不平凡点所构成的集合. 反之, 其补集就是一个 s 为 0-section 的点所构成的轨迹.

定理 2.6.1 $\text{Supp } s$ 是 X 的闭子集.

注 2.6.2 由连续函数非零的点所构成的轨迹是开的; 由 *germ of function* 非零所在的点所构成的轨迹是闭的.

定义 2.6.4 (Support of a sheaf) Define the **support of a sheaf** of groups $\mathcal{G}$, denoted $\text{Supp } \mathcal{G}$, as the locus where the stalks are nontrivial:

$$\text{Supp } \mathcal{G} := \{p \in X : |\mathcal{G}_p| \neq 1\}$$

等价地, $\text{Supp } \mathcal{G}$ 是所有 support of sections over all open sets 的并.

- 练习 2.6.1**
1. 设 Y 是一个拓扑空间, $Z \subset Y$ 是闭子集, $i: Z \hookrightarrow Y$ 是一个嵌入. 如果 $\mathcal{F}$ is a sheaf of groups on Z , 证明 $\text{stalk } (i_*\mathcal{F})_q, q \notin Z$ 以及 $\text{stalk } \mathcal{F}_q, q \in Z$ 是一个单元素集.
 2. 设 $\text{Supp } \mathcal{G} \subset Z$, Z 是闭的. 证明自然映射 $\mathcal{G} \rightarrow i_*i^{-1}\mathcal{G}$ 是一个同构. 因此闭子集的 *sheaf supported* 可被视为一个该闭子集的一个 *sheaf*.

2.6.3 Extension by zero, an occasional left adjoint to the inverse image functor

In addition to always being a left adjoint, π^{-1} can sometimes be a right adjoint, when π is an inclusion of an open subset. We discuss this when we need it.

第三章 Toward schemes

在正式介绍 schemes 之前, 我们回顾一些拓扑学知识, 并介绍在代数几何中常用的拓扑, 即 Zariski 拓扑. 再介绍 vanishing sets 以及 distinguish set, 它们将用于描述几何对象. 再将代数中的内容与几何中的内容进行对应.

3.1 The underlying set of an affine scheme

3.1.1 Spectrum of ring

定义 3.1.1 (Spectrum) 设 A 是一个环, 我们定义集合 $\text{Spec } A$ 为由 A 的所有素理想所构成的集合. 并称其为 *Spectrum of ring* A . 我们称 $a \in A$ 为 $\text{Spec } A$ 上的函数 (function). 并称 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ 为 $\text{Spec } A$ 中的点 (point), 那么函数 a 在点 $\mathfrak{p}$ 处的值定义为等价类 $a \pmod{\mathfrak{p}} \in A/\mathfrak{p}$.

注 3.1.1 1. 有时为了区分会把点 $\mathfrak{p}$ 记为 $[\mathfrak{p}]$.

2. 对于域 K , 我们常使用符号 $\mathbb{A}_K^n$ 来表示 $\text{Spec } K[x_1, \dots, x_n]$.

上述定义只是将 Spectrum 定义为一个集合, 不过我们马上会赋予其拓扑意义.

例 3.1.1 设 K 是一个域, 则 K 的理想只有 $(0), (1)$ 两个. 由于 K 也是整环, 所以 $\text{Spec } K = \{(0)\}$ 是平凡的.

例 3.1.2 考虑整数环 $\mathbb{Z}$, 其 spectrum 为 $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{p\mathbb{Z} : p \text{ 是素数}\}$. 那么 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上的函数 5 在点 $[(2)]$ 处的取值为等价类 $5 \pmod{2\mathbb{Z}} = 1 \pmod{2\mathbb{Z}}$; 在点 $[(3)]$ 处的取值为 $5 \pmod{3\mathbb{Z}} = 2 \pmod{3\mathbb{Z}}$.

如果 $a \pmod{\mathfrak{p}} = 0$, 我们就称 *a function a vanishing at point $[\mathfrak{p}]$* 或者 *a function a that is 0 at the point $[\mathfrak{p}]$* . 我们称以映射为定义的函数为 *regular function*. 一个值得注意的点就是, regular function 的可以通过逐点的值来定义的, 而函数则会出现, 即使在每个点上的值都一样, 这两个函数也是不一样的.

例 3.1.3 考虑域 K 上多项式环 $K[x]$. 我们称商环 $K[x]/(x^2)$ 为 *dual numbers* 的环. 接下来我们描述它的 spectrum $\text{Spec } K[x]/(x^2)$: 由于有对应

$$\{(\text{prime}) \text{ ideals of ring } R \text{ containing ideal } I\} \longleftrightarrow \{(\text{prime}) \text{ ideals of } R/I\}$$

所以 $K[x]/(x^2)$ 中的素理想由 $K[x]$ 中那些包含 (x^2) 的素理想 $\mathfrak{p}$ 所决定. 由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 所以 $(x^2) \subset \mathfrak{p}$ 说明 $x \in \mathfrak{p}$. 因此 $(x) \subset \mathfrak{p}$. 故 $\mathfrak{p}$ 决定了 $K[x]/(x)$ 中的素理想. 即我们有

$$\text{Spec } K[x]/(x^2) \longleftrightarrow \{\mathfrak{p} : (x^2) \subset \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} : (x) \subset \mathfrak{p}\} \longleftrightarrow \text{Spec } K[x]/(x).$$

由于 $K[x]/(x) \cong K$, 所以 $\text{Spec } K[x]/(x) = \text{Spec } K = \{(0)\}$. 这说明了 $\text{Spec } K[x]/(x^2)$ 是一个单点集. 我们记 $\text{Spec } K[x]/(x^2) = \{\mathfrak{p}'\}$.

现在将目光转向 $\text{Spec } K[x]/(x^2)$ 上的函数 $x \in K[x]/(x^2)$. 由于 $x^2 = 0 \in \mathfrak{p}'$, 所以 $x \in \mathfrak{p}'$. 这说明 $x \pmod{\mathfrak{p}'} = 0$. 但是 $x \neq 0$.

引理 3.1.1 设 R 是交换环, S 为其 *multiplicatively closed set*, 则 $p \mapsto pS^{-1}R$ 是一个从 $D = \{p \in \text{Spec } R : p \cap S = \emptyset\}$ 到 $\text{Spec } S^{-1}R$ 的 *inclusion-preserve* 双射. 其逆映射为 $q \mapsto \phi_S^{-1}q, q \in S^{-1}R$ 其中 $\phi_S : R \rightarrow S^{-1}R$ 为 *canonical map*.

例 3.1.4 设 K 是一个域, 我们描述集合 $\text{Spec } K[x]_{(x)}$: 由引理 3.1.1 可知,

$$D = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } K[x] : \mathfrak{p} \cap (K[x] \setminus (x)) = \emptyset\} \longrightarrow \text{Spec } K[x]_{(x)} = \text{Spec}(K[x] \setminus (x))^{-1}K[x]$$

为双射.

由于 K 为域, 故是一个整环, 所以 $K[x]$ 也是一个整环, 并且 $K[x]_{(x)}$ 也是一个整环. 这说明 $(0) \in \text{Spec } K[x]$. 由于 $(0) \cap K[x] \setminus (x) = \emptyset$, 所以我们有 $(0)(K[x] \setminus (x))^{-1}K[x] = 0 \in \text{Spec } K[x]_{(x)}$.

设非零素理想 $\mathfrak{p} \subset D$, 那么 $(0) \subsetneq \mathfrak{p} \subset (x)$. 由于 $K[x]$ 是 PID, 所以存在某个 $a \in K[x]$ 使得 $\mathfrak{p} = (a) = (xa)$. 如果 $\mathfrak{p} \neq (x)$, 则 $x \notin \mathfrak{p}, a \in \mathfrak{p}$. 这说明 $xa|a$. 由于 $K[x]$ 为整环, 故存在 $f \in K[x]$ 使得 $fx = 1$, 这是个矛盾, 故只能有 $\mathfrak{p} = (x)$, 即 $(x)K[x]_{(x)} \in \text{Spec } K[x]_{(x)}$. 这说明

$$\text{Spec } K[x]_{(x)} = \{(0), (x)K[x]_{(x)}\} \cong \{(0), (x)\}.$$

除了上述方法, 我们还可以通过 Noether 理论来得到 $\text{Spec } K[x]_{(x)}$: 对 Noetherian 环 R 考虑 Krull 维数, 我们有等式

$$\dim(R[x]) = \dim(R) + 1.$$

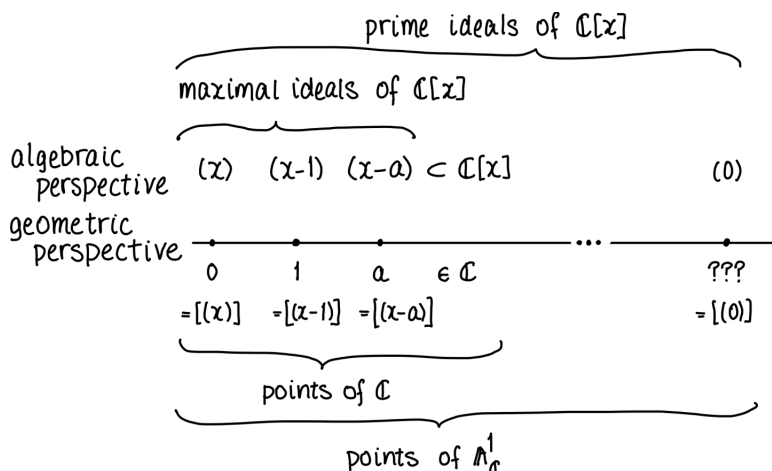
由于 $\dim(K) = 0$, 故 $\dim(K[x]) = 1$, 以及 $(0) \subsetneq (x)$. 这说明 (x) 是 $K[x]$ 中的唯一非零素理想. 也能得到 $\text{Spec } K[x]_{(x)} \cong \{(0), (x)\}$.

例 3.1.5 (the complex affine line) 考虑 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 = \text{Spec } \mathbb{C}[x]$, 我们接下来寻找 $\mathbb{C}[x]$ 的素理想. 由于 $\mathbb{C}[x]$ 是整环, 所以 (0) 是素理想. 对于任意的 $a \in \mathbb{C}$, $(x - a)$ 为素理想, 此外它还是极大理想, 因为 $\mathbb{C}[x]/(x - a) \cong \mathbb{C}$ 或者有正合列

$$0 \longrightarrow (x - a) \longrightarrow \mathbb{C}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(a)} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

接下来我们来证明没有其它的素理想: 我们将使用 $\mathbb{C}[x]$ 的多项式除法运算以及唯一分解性. 令 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 如果 $\mathfrak{p} \neq (0)$, 则设 $f(x) \in \mathfrak{p}$ 为 degree 最小的非零多项式. 由于 $1 \notin \mathfrak{p}$ 所以 $f(x)$ 不会只有常数项. 如果 $f(x)$ 不是线性的, 即具有含 x^2 以及更高次数的项, 则 $f(x)$ 可以分解为多项式的乘积 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x), h(x)$ 都有正的 degree (因为 $\mathbb{C}$ 是代数闭域). 由 $\mathfrak{p}$ 是素理想可知 $g(x) \in \mathfrak{p}$ 或者 $h(x) \in \mathfrak{p}$, 而 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的 degree 都是小于 $f(x)$ 的, 所以是矛盾的, 故 $f(x)$ 的 degree 不会超过 1. 故存在某个 $a \in \mathbb{C}$ 使得 $x - a \in \mathfrak{p}$. 我们再证明 $\mathfrak{p} = (x - a)$. 设 $f(x) \in \mathfrak{p}$. 那么由多项式除法可得存在 $m \in \mathbb{C}$ 使得 $f(x) = g(x)(x - a) + m$. 移项可得 $m = f(x) - g(x)(x - a) \in \mathfrak{p}$. 如果 $m \neq 0$, 那么 $1 \in \mathfrak{p}$ 得到矛盾, 所以 m 只能为 0, 即 $f(x) = g(x)(x - a)$. 故 $\mathfrak{p} = (x - a)$.

我们将理想 $(x - a)$ 看作是点 a , 那么就可以画出一条直线, 上面有点 $1, 2, \dots, a, \dots$. 得到图 3.1. 这张图刚好印证了 Sophie Germain 的观点: “代数不过是几何的文字, 几何不过是在绘制代数。”

图 3.1: 复仿射直线 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \text{Spec } \mathbb{C}[x]$

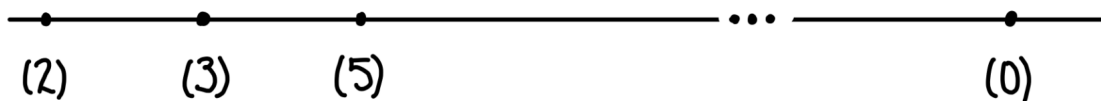
这里产生了一个疑问: “我们应该将点 0 绘制在哪里?” 虽然在图 3.1 中我们把它放在了直线的最远处, 但是我们后面马上会知道, 点 0 会漂泊在直线上的所有点附近. 即对于直线上任意一点的“邻域”, 点 0 都在这个“邻域”中. 不过我们还没有赋予 *spectrum* 拓扑 (即 Zariski 拓扑), 所以等到后面我们才会知道这个邻域是什么样的.

我们再感受一下 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$. 由定义 3.1.1 我们知道, $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 上的函数为多项式. 所以 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 是一个函数. 那么它在点 1 即点 $[(x-1)]$ 处的取值是多少呢? 答案就是 $f(1)$ 所张成的等价类! 或者由多项式除法得到等价式子 $f(x) \pmod{(x-1)}$. $f(x)$ 在点 0 处的值为 $f(x) \pmod{(0)}$, 即为 $f(x)$ 本身所张成的等价类.

最后我们再考虑“有理函数 (rational function)” $g(x) = \frac{(x-3)^3}{(x-2)}$. 它在除了 $x=2$ 以外的所有点是有定义的. 我们在后面学习了 *structure sheaf* 之后我们就会知道它是开集 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \setminus \{2\}$ 中的元素. 这个函数在点 3 处有 3 重根, 在点 2 处有一个洞.

注 3.1.2 如果我们将这个例子中的 $\mathbb{C}$ 换成一般的代数闭域 $K = \overline{K}$, 则称 $\mathbb{A}^1_K$ 为 *affine line over K*. 其所要讨论的内容与这个例子完全是一样的. 作出来的图也是一样的, 只是换换符号.

例 3.1.6 (Spec $\mathbb{Z}$) 考虑整数环 $\mathbb{Z}$, 它的素理想为 $(0), (p), p$ 为素数, 因此我们也可以将其看作是直线上的点, 从而可以画出图像:

图 3.2: 直线 $\text{Spec } \mathbb{Z}$, 它看起来很像图 3.1

接下来考虑 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上的函数. 100 是 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上的一个函数, 它在点 $[(3)]$ 处的值为 $1 \pmod{3\mathbb{Z}}$, 它在点 $[(2)]$ 的值为 $0 \pmod{2\mathbb{Z}}$. 其实它在任意偶数点上的值都是 0. $\frac{27}{4}$ 是一个 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 上的有理函数. 后面我们会知道它在点 $[(2)]$ 处是有 *double pole* 的, 在点 $[(3)]$ 处是有 *triple zero* 的. 它在点 $[(5)]$ 处的值为

$$27 \times 4^{-1} \equiv 2 \times (-2) \equiv 3 \pmod{5}.$$

例 3.1.7 (the affine line over $\mathbb{R}$) 考虑 $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 = \text{Spec } \mathbb{R}[x]$. 由于 $\mathbb{R}[x]$ 是 *Euclid* 整环, 所以可以类似的用多项式除法得到 $\mathbb{R}[x]$ 的素理想有 $(0), (x-a), a \in \mathbb{R}$ 以及 (x^2+ax+b) 的形式, 其中 x^2+ax+b 为 $\mathbb{R}$ 上不可约多项式. 后面两个素理想是极大理想, 因为 $\mathbb{R}[x]/(x-a) \cong \mathbb{R}, \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$.

练习 3.1.1 证明 $(x^2+ax+b), x^2+ax+b$ 在 $\mathbb{R}$ 上不可约, 是素理想, 并且 $\mathbb{R}[x]/(x^2+ax+b) \cong \mathbb{C}$.

例 3.1.8 考虑 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 = \mathbb{Q}[x]$. 由于 $\mathbb{Q}[X]$ 是 *PID* (并且还是 *Euclid domain*), 所以非零素理想都是极大理想, 并且素理想还是主理想, 故素理想有 (0) 以及 $(f(x))$, 其中 $f(x) \neq 0$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的 *prime element*, 即不可约多项式.

定义 3.1.2 (Galois conjugate) 设 K 是一个域, 再设 L 为 *separable closure*. 对于任意 $x \in K$, K 的 *absolute Galois* 群 G_K 作用在 L 上得到 x 轨道, 则 L 中在 x 轨道中的那些元素称为 x 的 *Galois conjugates*.

例 3.1.9 复数域上 $a+bi$ 和 $a-bi$ 就是 *Galois* 共轭的.

引理 3.1.2 设 K 是一个域, 则 $\text{Spec } K[x]$ 中会存在无穷多个点.

证明 设 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 为 n 个 $K[x]$ 上的不可约多项式, 那么我们可以构造新的不可约多项式 $f_{n+1} = f_1 f_2 \cdots f_n + 1$. 类似地可以构造出 $f_{n+2}, f_{n+3}, \dots$. 就可以得到无穷多个不可约多项式, 它们生成的理想都是素理想, 即 $\text{Spec } K[x]$ 中会有无穷多个点. $\square$

例 3.1.10 (the affine line over $\mathbb{F}_p$) 考虑有限 p 域 $\mathbb{F}_p$ 以及 $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_p}^1 = \text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$. 由之前的例子我们知道, $\mathbb{F}_p[x]$ 是一个 *Euclid* 整环, 所以它的素理想由形式 $(0), (f(x))$, 这里 $f(x)$ 是 $\mathbb{F}_p$ 上不可约多项式, 它可以是任意 *degree* 的 $\mathbb{F}_p[x]$ 上的不可约多项式所构成的集合与 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 中与 $\mathbb{F}_p$ *Galois* 共轭的元素所构成的集合是一一对应的.

由引理 3.1.2 可知, $\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$ 中会有无穷多个点, 那么我们可以挑出 p 个点 (或者更多) 让它们与 $\mathbb{F}$ 中的所有元素对应. 这使得 $\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$ 中的信息远远丰富于 p 的点所构成的域 $\mathbb{F}_p$. 比如说, 存在多项式 $f(x)$ 不能被 $\mathbb{F}_p$ 中的 p 个点所确定, 但是它能被 $\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$ 所确定 (不过正如例 3.1.3 所说, 也存在多项式也不能被 $\text{Spec } \mathbb{F}_p[x]$ 中的所有点确定).

我们已经讨论了很多直线, 接下来讨论面. 我们将两条直线 $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1$ 垂直画在平面上, 构成一个复平面. 然后我们将平面沿着实轴折叠, 我们会发现点 i 和 $-i$ 粘在一起. 其实所有 *Galois* 共轭的点会“粘在”一起. 接下来我们探索一下这个平面上的函数 $f(x) = x^3 - 1$, 它在点 $[(x-2)]$ 处的值为 7, 或者严格写为 $7 \pmod{x-2}$. 那么它在点 $[(x^2+1)]$ 处的值呢? 我们可以得到同余式

$$x^3 - 1 \equiv -x - 1 \pmod{x^2 + 1}.$$

即 $-x-1$ 和 x^3-1 在点 $[(x^2+1)]$ 处的值一样, 即二者在折叠后是“粘在”一起的, 所以我们可以把 $-x-1$ 看作是 $-i-1$.

如果愿意的话, 上述操作可以在一些非代数闭域上完成.

例 3.1.11 (the complex affine plane) 考虑 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$. 遗憾的是, $\mathbb{C}[x, y]$ 不是 *PID*, 因为 (x, y) 不是主理想. 不过我们还是可以快速得到一些素理想: (0) 是素理想, $(x-2, y-3)$ 是素理想并且还是极大理想, 因为 $\mathbb{C}[x, y]/(x-2, y-3) \cong \mathbb{C}$, 其同构为 $f(x, y) \mapsto f(2, 3)$. 更一般地, $(x-a, y-b)$ 是素理想. 除此以外, 对于 $\mathbb{C}[x, y]$ 上不可约多项式 $f(x, y)$, 其生成的理想 $(f(x, y))$ 也是素理想. 比如 $(y-x^2), (y^2-x^3)$ 都是素理想.

可以证明的是, 除了上述给出的素理想以外没有其它形式的素理想. 事实上, 如果存在素理想 $\mathfrak{p}$ 不是主理想, 则可以找到 $f(x, y), g(x, y) \in \mathfrak{p}$ 是不能再做分解的. 由 $\mathbb{C}(x)[y]$ 上的 *Euclid* 算法可知存在一个非零多项式 $h(x) \in (f(x, y), g(x, y)) \subset \mathfrak{p}$. 由多项式的不可分解性可以说明 $h(x)$ 存在形如 $x-a$ 的因子, 且 $x-a \in \mathfrak{p}, a \in \mathbb{C}$ 类似的也有 $y-b \in \mathfrak{p}, b \in \mathbb{C}$. 这说明如果素理想不是主理想, 则只有 $(x-a, y-b)$ 的形式.

接下来我们尝试画出 $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$. 首先我将极大理想 $(x - a, y - b)$ 看作是点 $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. 将不可约多项式生成的理想 $(f(x, y))$ 看作是曲线 $f(x, y) = 0$ 上的点, 但是无法确定它具体是在哪里. 比如点 $(y - x^2)$ 会在曲线 $y = x^2$ 上, 不过还不知道它具体会在曲线的哪个位置. 最后点 (0) 是一个 *generic point*, 它也是漂泊在所有点 (a, b) 的附近, 但是它不会在曲线 $f(x, y) = 0$ 上. 于是我们就可以得到下图:

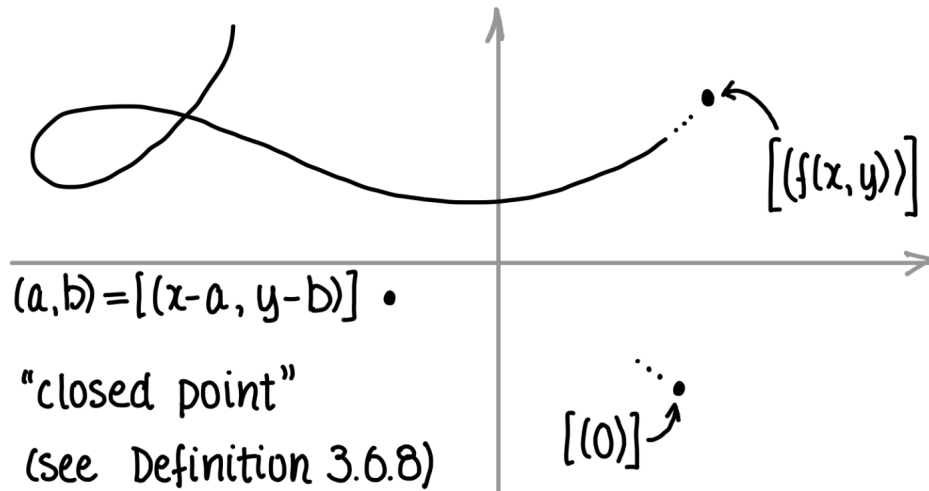


图 3.3: $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$

我们还可以赋予“维数”给图像上的元素. 我们认为点 (a, b) 或者说理想 $(x - a, y - b)$ 是 0 维的. 点 $[(f(x, y))]$ 由于没有确定的位置, 则可以近似的看成是一个在曲线上的“动点”, 构成一个轨迹, 故为 1 维. 点 (0) 漂泊在任意点 (a, b) 的周围, 我们赋予它 2 维. 我们所用到的维数是 *complex* 维数或者代数维数, 我们还没有具体的定义它, 不过可以先给出复平面 $\mathbb{C}^2$ 的 *real dimension* 是 4, *complex dimension* 为 2. 一般来说 *complex dimension* 是 *real dimension* 的一半.

注 3.1.3 这个例子中的 $\mathbb{C}$ 也可以换成一般的代数闭域.

接下来探讨更一般的 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$.

例 3.1.12 考虑 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y, z]$. 可以得出 $(x - a, y - b, c - z); a, b, c \in \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}[x, y, z]$ 的素理想. 因为其商环同构于 $\mathbb{C}$ 故为极大理想. 我们把这个理想看作是点 (a, b, c) , 它是 0 维的. 由 Hilbert 弱零点定理可知, $\mathbb{C}[x, y, z]$ 没有其它形式的极大理想.

我们暂时先不对一般环 A 以及 $\mathbb{A}_A^n = \text{Spec } A[x_1, \dots, x_n]$ 做讨论.

3.1.2 Hilbert 零点定理

在例 3.1.12 中我们用到了 Hilbert 弱零点定理, 那么我们简单探讨一下 Hilbert 弱零点定理与 Hilbert 零点定理.

定理 3.1.1 (Hilbert 弱零点定理) 如果 K 是一个代数闭域. 则多元多项式环 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的所有极大理想都是形如 $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), a_i \in K$ 的.

定理 3.1.2 (Hilbert 零点定理) 设 K 是一个域, 则多元多项式环 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$ 的 *residue field* $K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ 都是 K 的有限扩张. 或者等价地说, 任意 K 的域扩张 F 如果是有限生成 K -代数, 那么 F 也是由有限多个元素所张成的 K 上线性空间.

注 3.1.4 Hilbert 定理经常被称为 Zariski 引理.

我们接下来通过 Hilbert 零点定理来证明 Hilbert 弱零点定理.

证明 设 K 是一个代数闭域, 再设 $\mathfrak{m}$ 为环 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 中的极大理想. 那么自然有满同态

$$\phi: K[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{m}.$$

所以 residue field $K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{m}$ 是一个有限生成 K -代数. 由**定理 3.1.2**可知, 它是 K 的有限扩张, 故为代数扩张, 而且还是 K 上有限生成的线性空间. 由于 K 本身就是代数闭域, 所以

$$K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{m} \cong K.$$

这说明 $\mathfrak{m}$ 的形式只能为 $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n), a_i \in K$. □

例 3.1.13 设 K 是一个域, 以及整环 A 是一个有限 K -代数 (即 A 是 K 上有限维线性空间). 考虑乘法映射 $\times x: A \rightarrow A, a \mapsto ax$. 由于 A 是一个整环, 故 $\ker(\times x) = \{0\}$, 即 $\times x$ 是一个单射. 故有

$$\dim_K A = \dim_K \ker(\times x) + \dim_K \operatorname{im}(\times x) = 0 + \dim_K \operatorname{im}(\times x) = \dim_K \operatorname{im}(\times x).$$

这说明 $\times x$ 是一个满射. 故是一个线性空间上的同构. 故对于任意的 $a \in A$, 都存在 $b \in A$, 通过乘法映射 $\times b$ 使得 $ab = 1$. 再加上 A 本身是交换环, 故 A 是一个域.

于是用上面的结论, 如果整环 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 存在素理想 $\mathfrak{p}$ 可以使得 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ 是一个有限 K -代数, 那么 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ 就是一个域, 故 $\mathfrak{p}$ 是 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的极大理想. 那么由**定理 3.1.2**可知, $K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ 是 $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 的有限扩张.

对于环 $\mathbb{C}[x, y, z]$, 我们也可以寻找它的素理想. 首先是 genric point (0) , 它对应着“3 维点”. 其实是关于不可约多项式 $f(x, y, z)$ 所生成的理想 $(f(x, y, z))$. 其 $f(x, y, z) = 0$ 的点集可以构成一个平面, 那么自然地我们认为 $(f(x, y, z))$ 是“2 维的”. 对于形如 (x, y) 的素理想 (因为 $\mathbb{C}[x, y, z]/(x, y) \cong \mathbb{C}[z]$ 是一个整环), 我们知道 $x = 0, y = 0$ 的轨迹是一条曲线, 所以我们认为该理想是“1 维”的. 还有很多不同类型的 1 维素理想, 但是我们目前无法找到一个合适的理由将其合理的进行分类. 可以粗略的认为 1 维的素理想就是不可约的曲线.

再考察 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x]$ 中的点. 其素理想都是形如 $(x - a), a \in \mathbb{Q}$ 的理想. 所以 $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1$ 中的点都是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的极大理想.

例 3.1.14 由于

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}[x, y]/(x - y, x^2 - 2) &\cong \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \\ \mathbb{Q}[x, y]/(x + y, x^2 - 2) &\cong \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \end{aligned}$$

都是域, 所以

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, & x = -\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}, & y = -\sqrt{2}, \end{cases}$$

说明了 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 和 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 是黏在一起的. 以及

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, & x = -\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2}, & y = \sqrt{2}, \end{cases}$$

说明了 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ 和 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 是黏在一起的.

3.1.3 Quotients and localizations

如果已知一个环 A , 我们可以通过对其做商, 或者局部化来得到一个新的环. 这个新的环的 spectrum 会和原来的环的 spectrum 也会有一定的联系.

首先是关于商环.

定理 3.1.3 设 A 是一个环, 再设 I 是 A 的一个理想, 则我们有一一对应

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : I \subset \mathfrak{p}\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A/I\}.$$

即 A/I 中的所有素理想都可以对应到 A 中的某个素理想上, 所以我们可以把 $\operatorname{Spec} A/I$ 看作是 $\operatorname{Spec} A$ 的一个子集.

证明 设 $\phi : A \rightarrow A/I$ 是一个 canonical map. 可以证明存在其映射 $\varphi : A/I \rightarrow A$ 使得 ϕ 成为一个素理想之间 inclusion-preserve 的双射, 即如果 $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \in \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : I \subset \mathfrak{p}\}$ 满足 $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$. 那么 $\phi(\mathfrak{p}_1) \subset \phi(\mathfrak{p}_2)$ 也是成立的. $\square$

然后我们再看一下局部环.

定理 3.1.4 设 S 是一个 *mutiplicative subset of ring* A . 那么存在一一对应

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} S^{-1}A\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

证明 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ 满足 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. 再记 $\tilde{\mathfrak{p}} = \{\frac{a}{b} : a \in \mathfrak{p}, b \in S\}$. 由于 $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, 这说明 $\frac{s}{s} = 1 \notin \tilde{\mathfrak{p}}$, 所以 $\tilde{\mathfrak{p}} \neq S^{-1}A$. 再设 $\frac{t_1}{s_1}, \frac{t_2}{s_2} \in S^{-1}A$ 满足 $\frac{t_1}{s_1} \cdot \frac{t_2}{s_2} \in \tilde{\mathfrak{p}}$. 由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 所以 t_1 或者 t_2 是属于 $\mathfrak{p}$ 的. 故 $\tilde{\mathfrak{p}}$ 是一个素理想.

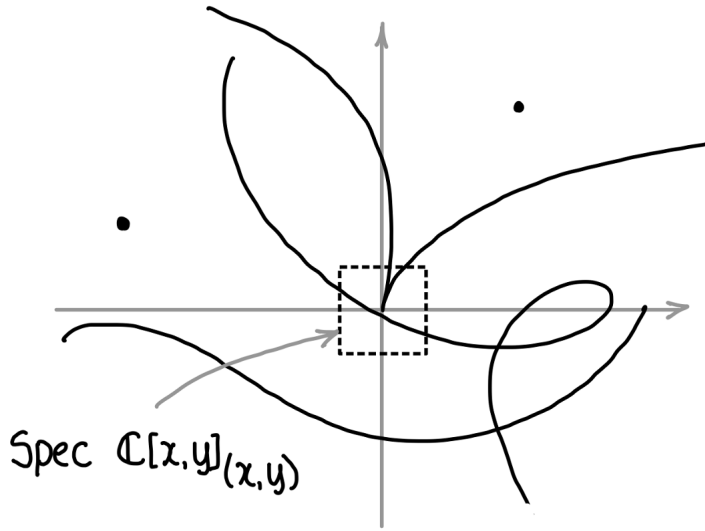
设 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$. 我们记 $\mathfrak{q}$ 中形如 $\frac{a}{b}$ 的元素中的 a 所构成的集合为 $\tilde{\mathfrak{q}}$. 那么设 $r_1, r_2 \in A$ 满足 $r_1 r_2 \in \tilde{\mathfrak{q}}$. 由于 $\frac{r_1}{1} \cdot \frac{r_2}{1} \in \mathfrak{q}$, 可以得到 $\frac{r_1}{1}$ 或者 $\frac{r_2}{1}$ 属于 $\mathfrak{q}$. 故有 r_1 或者 r_2 属于 $\tilde{\mathfrak{q}}$. 故 $\tilde{\mathfrak{q}}$ 是一个素理想. 如果 $\tilde{\mathfrak{q}} \cap S \neq \emptyset$, 那么 $\mathfrak{q}$ 不会是一个素理想, 所以 $\tilde{\mathfrak{q}} \cap S = \emptyset$.

我们最后来证明

$$\phi : \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : I \subset \mathfrak{p}\} \longrightarrow \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A/I\}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \tilde{\mathfrak{p}}$$

是双射. 如果 $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. 那么显然 $\tilde{\mathfrak{p}}_1 \neq \tilde{\mathfrak{p}}_2$. 对于任意的 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$, 我们可以将 $\mathfrak{q}$ 中的所有“分子”上的元素收集起来构成集合 $\tilde{\mathfrak{q}}$. 它是一个与 S 无交的 A 中的素理想, 且满足 $\phi(\tilde{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{q}$. 故 ϕ 是一个双射. $\square$

例 3.1.15 设 $S = A \setminus \mathfrak{p}$. 那么由**定理3.1.4**可知, $S^{-1}A$ 的素理想一一对应与 A 中与 S 无交的素理想, 即 A 中包含 $\mathfrak{p}$ 的素理想. 我们令 $A = \mathbb{C}[x, y], \mathfrak{p} = (x, y)$. 我们可以将 (暂时不给理由) $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]_{(x, y)}$ 中的点看作是一些穿过原点的“东西”. 它们是 0 维的. 那么 2 维的点还是 *generic point* (0). 最后 1 维的点就是 $((f(x, y)))$, 其中 $f(0, 0) = 0$, 即穿过原点的 *irreducible curve*. 我们可以画个大概的示意图.

图 3.4: $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]_{(x, y)}$

例 3.1.16 考虑 $\mathbb{C}[x, y]$ -模正合列

$$0 \longrightarrow (xy) \hookrightarrow \mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]/(xy) \longrightarrow 0.$$

注意到 $\mathbb{C}[x, y]_x$ 是一个 *flat* $\mathbb{C}[x, y]$ -模, 即函子 $(\cdot) \otimes_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[x, y]_x$ 是正合函子. 所以我们有正合列

$$0 \longrightarrow (xy) \otimes_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[x, y]_x \longrightarrow \mathbb{C}[x, y] \otimes_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[x, y]_x \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]/(xy) \otimes_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[x, y]_x \longrightarrow 0.$$

这说明

$$0 \longrightarrow (xy)_x \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]_x \longrightarrow (\mathbb{C}[x, y]/(xy))_x \longrightarrow 0$$

是正合的. 并且由于

$$(xy)_x = \left\{ \frac{f(x, y)xy}{x^n} : f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \right\} = \left\{ \frac{f(x, y)}{x^{n-1}}y : f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y] \right\} = (y) \subset \mathbb{C}[x, y]_x.$$

所以我们改写上述正合列得到

$$0 \longrightarrow (y) \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]_x \longrightarrow (\mathbb{C}[x, y]/(xy))_x \longrightarrow 0.$$

由于我们以及有正合列

$$0 \longrightarrow (y) \longrightarrow \mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[x] \longrightarrow 0$$

故有正合列

$$0 \longrightarrow (y) \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]_x \longrightarrow \mathbb{C}[x]_x \longrightarrow 0.$$

由于 $\frac{f(x, y)y}{x^n} = \frac{f(x, y)}{x^n}y$, 所以 $(y)_x = (y) \subset \mathbb{C}[x, y]_x$. 我们就得到了: $\mathbb{C}[x]_x$ 和 $(\mathbb{C}[x, y]/(xy))_x$ 都是 $(y) \rightarrow \mathbb{C}[x, y]_x$ 的 *cokernel*. 所以二者唯一决定于唯一同构. 即

$$(\mathbb{C}[x, y]/(xy))_x \cong \mathbb{C}[x]_x.$$

注 3.1.5 戴震远提供的证明方式:

$$(\mathbb{C}[x, y]/(xy))_x = \mathbb{C}[x, y]_x/(xy)_x \cong \mathbb{C}\left[x, y, \frac{1}{x}\right] / \left(xy, y, \frac{y}{x}, \frac{y}{x^2}, \dots\right) \cong \mathbb{C}\left[x, \frac{1}{x}\right] \cong \mathbb{C}[x]_x.$$

3.1.4 Important fact: Maps of rings induce maps of spectra (as sets)

定理 3.1.5 设 $\phi: B \rightarrow A$ 为环之间的同态, 以及 $\mathfrak{p}$ 是 A 中的一个素理想, 那么原像 $\phi^{-1}(\mathfrak{p})$ 为 B 中的素理想.

证明 设 $a, b \in B$ 满足 $ab \in \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. 这说明 $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \in \mathfrak{p}$. 由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 所以 $\phi(a) \in \mathfrak{p}$ 或者 $\phi(b) \in \mathfrak{p}$. 这说明 $a \in \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ 或者 $b \in \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. 故 $\phi^{-1}(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } B$. $\square$

由这个定理我们知道, $\phi: B \rightarrow A$ 可以诱导出 $\tilde{\phi}: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B, \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. 这给出了一个 contravariant functor $F: \text{Rings} \rightarrow \text{Sets}$.

3.1.5 The fault of nilpotents

我们在前面已经通过例3.1.3看到, 即使两个函数在每个点出的取值都相等, 但是两个函数仍然有可能不同. 我们会在本小节指出, 这种缺陷的原因是来自 nilradical.

定义 3.1.3 设 A 是一个环, 元素 $a \in A$ 如果满足存在 $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ 使得 $a^n = 0$, 则称 a 为 *nilpotent*. 特别地, 0 是 nilpotent 的.

定理 3.1.6 设 A 是一个环, 由 A 中所有 nilpotents 所构成的集合会是 A 的一个理想, 记为 $\mathcal{N}(A)$, 并称为 *nilradical of A* .

性质 3.1.1 设 A 是一个环, 再设 $\mathcal{N}(A)$ 为 A 的 nilradical, 那么嵌入 $\text{Spec } A/\mathcal{N}(A) \rightarrow \text{Spec } A$ 会变成一个双射.

定理 3.1.7 环 A 的 nilradical $\mathcal{N}(A)$ 为 A 中所有素理想的交, 即

$$\mathcal{N}(A) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}.$$

从几何的角度来看, $\text{Spec } A$ 中的函数在每个点都为 0 当且仅当这个函数是 nilpotent 的.

由这个定理, 对于两个 $\text{Spec } A$ 上的函数 f, g , 如果 f, g 在每一个点的取值相同, 相当于 $f - g$ 在每一个点的取值都为 0. 这只能说明 $f - g$ 这个元素是 nilpotent 的, 而不是它本身就是 0 元素. 这就是我们前面所说的这种函数的缺陷的由来. 如果一个环没有非零的 nilpotents, 我们称这个环是 **reduced** 的.

3.2 The underlying topological space of an affine scheme

在本节, 我们会开始为 spectrum 赋予拓扑空间, 并讨论其拓扑性质.

3.2.1 Vanishing sets

定义 3.2.1 (Vanishing set) 设 A 是一个环, 再设 S 是 A 的一个子集, 我们称

$$V(S) = \{p \in \text{Spec } A : S \subset \mathfrak{p}\}.$$

即由满足 S 中的任意函数取值为 0 的点 $\mathfrak{p}$ 所构成的集合.

定理 3.2.1 设 A 是一个环, S 为 A 的子集, 则 $V(S) = V((S))$.

证明 设 $\mathfrak{p} \in V((S))$, 那么 $(S) \subset \mathfrak{p}$. 我们有 $S \subset (S) \subset \mathfrak{p}$, 故 $V(S) \subset V((S))$. 再设 $\mathfrak{p} \in V(S)$, 那么 $S \subset \mathfrak{p}$. 由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 所以对于任意的 $r \in A, s \in S$ 都有 $rs \in \mathfrak{p}$. 那么对于任意的有限和 $\sum rs \in \mathfrak{p}$. 即 $(S) \subset \mathfrak{p}$, 故 $V((S)) \subset V(S)$. $\square$

例 3.2.1 考虑 *vanishing set* $V(xy, yz) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y, z]$. 我们探索这个集中会有什么样的点: 由 *vanishing set* 的定义知道, 这里面的素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $xy \in \mathfrak{p}, yz \in \mathfrak{p}$. 那么从集合的角度看相当于能使得 $xy = 0$ 以及 $yz = 0$ 的点由哪些. 所以我们直接去解 $xy = yz = 0$. 首先得到平面 $y = 0$ 以及直线 $x = z = 0$. 即得到 xz 平面与 y 轴, 这其中的点所对应的素理想 (即理想 $(x, z), (y)$) 都是 $V(xy, yz)$ 中的元素. 此外, 还有 *generic point* 0 所对应的 (0) 也在 $V(xy, yz)$ 中.

练习 3.2.1 请说明 x 轴, y 轴, z 轴都在 $V(xy, yz)$ 中.

解 首先由于 $y = z = 0$ 是方程 $xy = yz = 0$ 的解, 这说明点 (x) 都在 $V(xy, yz)$ 中, 即 x 轴都在 $V(xy, yz)$ 中. 类似地, $x = z = 0$ 以及 $x = y = 0$ 分别说明了 y 轴和 z 轴都在 $V(xy, yz)$ 中. $\square$

性质 3.2.1 设 A 是环, 且 S_1, S_2 为 A 的子集, 如果 $S_1 \subset S_2$, 那么 $V(S_2) \subset V(S_1)$.

定义 3.2.2 (radical) 设 A 是一个环, $I \subset A$ 是一个理想. 我们称集合

$$\sqrt{I} = \{r \in I : \exists n \in \mathbb{Z}^{>0}, r^n \in I\}$$

为 I 的 *radical*. 可以利用 **定理 3.1.7** 证明

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A, I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}.$$

性质 3.2.2 设 A 为一个环, I 为 A 的理想.

1. *radical* $\sqrt{I}$ 本身是一个 A 的理想.
2. A 的 *nilradical* $\mathcal{N}(A) = \sqrt{(0)}$.
3. $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$. 因此我们称如果一个理想本身等于它的 *radical*, 则称该理想为 *radical*.
4. *Vanishing set* $V(\sqrt{I}) = V(I)$.
5. 由于 A 的理想 I, J 满足 $(I \cap J)^2 \subset IJ \subset I \cap J$, 所以 $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$
6. $V(S) = V((S)) = V(\sqrt{(S)})$.
7. *radical* 和有限交可以交换: 设 $I_1, I_2, \dots$ 为 A 的理想, 那么 $\sqrt{\bigcap_{i=1}^n I_i} = \bigcup_{i=1}^n \sqrt{I_i}$.

3.2.2 Zariski 拓扑

定义 3.2.3 设 A 是一个环, S 为 A 的子集, 我们定义 $\text{Spec } A$ 中的 *vanishing sets* $V(S)$ 为 $\text{Spec } A$ 中的闭集. 并称该拓扑为 *Zariski* 拓扑.

由 **命题 3.2.2** 可以证明如下性质. 这说明我们上述定义是良定义的, 即 *Zariski* 拓扑的确是一个拓扑.

性质 3.2.3 设 A 是一个环.

1. $\emptyset$ 和 $\text{Spec } A$ 都是 $\text{Spec } A$ 中的开集.

2. 如果 I_i 是一些理想, 其中 i 属于某个指标集, 那么 $\bigcap_i V(I_i) = V(\sum_i I_i)$. 因此开集的任意并仍然是开集.
3. 设 I_1, I_2 为 A 的理想 $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2)$. (理想的乘积 $I_1 I_2$ 记为集合 $\{\sum_{i=1}^n i_{1,i} i_{2,i} : I_{j,i} \in I_j, j = 1, 2\}$, 这个集合也是一个理想).

证明 1. 由于 $V(0) = \text{Spec } A$ 是闭集, 所以其补集 $V(0)^c = \emptyset$ 是开集. 由于 $V(A) = \emptyset$ 为闭集, 所以 $V(A)^c = \text{Spec } A$ 是开集.

2. 和 3. 的证明见交换代数教材. □

我们可以把 V 看作是作用在集合上的一个函数, 这个函数是 “inclusion-reserving” 的, 即如果有 $S_1 \subset S_2$, 那么 $V(S_1) \subset V(S_2)$. 但是值得注意的是, 即使 $S_1 \subset S_2$ 是真包含关系, 仍有可能存在 $V(S_1) = V(S_2)$. 可以观摩下面这个例子.

例 3.2.2 我们知道 $(S) \subset \sqrt{(S)}$, 但是在**命题 3.2.2**中, 我们有 $V(S) = V(\sqrt{(S)}) = V(\sqrt{(S)})$.

我们再通过一个例子来看一下 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ 上的 Zariski 拓扑.

例 3.2.3 回忆 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 = \text{Spec } \mathbb{C}[x]$. 首先显然 $\text{Spec } \mathbb{C}[x], \emptyset$ 都是开集. 然后我们在**例 3.1.5**中找到了它的素 (极大) 理想的形式都为 $(x - a), a \in \mathbb{C}$. 它对应着轴上的点 a . 那么对于任意的 $S \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, 由于 $\mathbb{C}[x]$ 是 PID, 所以存在某个 $f \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $(S) = (f)$. 所以其闭集为

$$V(S) = V((f)) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 : (f) \subset \mathfrak{p}\} = \{(x - a) : a \in \mathbb{C}, (f) \subset (x - a)\}.$$

由于 $\mathbb{C}$ 是代数闭域, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{C}$ 上最多有有限多个根. 这意味着 $V(S)$ 是一个有限集. 这说明 $\text{Spec } \mathbb{C}[x]$ 再去掉有限多个极大理想后得到的 $\text{Spec } \mathbb{C}[x] \setminus V(S)$ 是 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ 中的开集.

注 3.2.1 我们可以把 $\mathbb{C}$ 推广到一般的代数闭域 K 上面. 由于 K 是域, 当且仅当 $K[x]$ 是 PID. 那么类似地, $\mathbb{A}_K^1$ 中的闭集为 $V((g)) = \{(f) \in \mathbb{A}_K^1 : (g) \subset (f)\}$ 对某个 $f \in K[x]$ 成立. 即 $f(x) | g(x)$. 由于 $g(x)$ 至多有有限多个分解, 所以 $V(g(x))$ 是有限集. 故 $\text{Spec } K[x]$ 去掉有限多个素理想就是 $\mathbb{A}_K^1$ 中的开集.

我们再研究下 $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ 中的 Zariski 拓扑是什么样的, 由于 $\mathbb{C}[x, y]$ 不是 PID, 所以情况会稍许复杂些.

例 3.2.4 (Closed subset of $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$) 回忆**例 3.1.11**. 我们知道 $\mathbb{C}[x, y]$ 中的素理想有 $(x - a, y - b), (f(x, y)), (0), a, b \in \mathbb{C}$ 三种类型, 其中 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{C}[x, y]$ 上不可约. 那么其中的闭集有以下形式.

1. 全空间, 即 $V(0)$.
2. 有限多条曲线以及有限多个点所构成的集合. 即 $V((f(x, y))), V((x - a, y - b))$.

3.2.3 Important fact: Maps of rings induce continuous maps of topological spaces

我们在前面已经知道, 对于环之间的同态 $\phi: B \rightarrow A$, 它可以诱导出 spectrums 之间的同态 $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$. 现在我们赋予了 spectrum 以拓扑空间, 那么这说明环之间的同态可以诱导出拓扑空间之间的映射, 并且这个映射还是连续映射.

定理 3.2.2 设 $\phi: B \rightarrow A$ 是环之间的态射, 那么其诱导映射 $\pi: \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ 是拓扑空间之间的连续映射. 并且可以将 Spec 视作 *contravariant* 函子 $\mathbf{Rings} \rightarrow \mathbf{Top}$.

证明 设 $V(S) \subset \text{Spec } B$ 是一个闭集. 考虑拉回 $\pi^{-1}(V(S)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : S \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})\}$. 如果 $S \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, 那么 $\phi(S) \subset \mathfrak{p}$. 这说明 $\pi^{-1}(V(S)) \subset \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \phi(S) \subset \mathfrak{p}\} = V(\phi(S))$. 如果 $\phi(S) \subset \mathfrak{p}$, 那么对于任意的 $s \in S, \phi(s) \in \mathfrak{p}$. 这说明 $s \in \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, 即 $S \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$. 故 $\pi^{-1}(V(S)) \supset V(\phi(S))$. 最后 $\pi^{-1}(V(S)) = V(\phi(S))$. 故 $V(S)$ 的原像仍然是闭集, 即 π 是连续的.

我们证明 Spec 是一个 contravariant 函子. 定义

$$\text{Spec} : \mathbf{Rings} \rightarrow \mathbf{Top}, \quad A \mapsto \text{Spec } A, \quad (\phi : B \rightarrow A) \mapsto (\pi : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B),$$

其中 $\text{Spec } A, \text{Spec } B$ 具有 Zariski 拓扑结构, π 是由 ϕ 所诱导出的. 设 $\phi_1 : C \rightarrow B, \phi_2 : B \rightarrow A$ 为环之间的同态, 它们诱导出 $\pi_1 : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } C, \pi_2 : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$. 那么 $\text{Spec}(\phi_2 \circ \phi_1) : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } C$ 相当于 $\pi_1 \circ \pi_2 = \text{Spec } \phi_1 \circ \text{Spec } \phi_2$. 这就说明了 Spec 是一个 contravariant 函子. $\square$

注 3.2.2 虽然我们说连续映射是环之间的态射所诱导出的, 但是并不是所有的连续映射只能通过诱导的方式得到. 比如考虑映射

$$f : \text{Spec } \mathbb{C}[x] \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x], \quad \begin{cases} (x) \mapsto (x-1), \\ (x-1) \mapsto (x), \\ \text{id}, \quad \text{else.} \end{cases}$$

设 $V((x)) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbb{C}[x] : (x) \subset \mathfrak{p}\} = \{(x)\}$. 其原像为 $f^{-1}(V((x))) = f^{-1}(\{(x)\}) = \{(x-1)\} = V((x-1))$ 仍然是一个闭集. 所以 f 是一个连续映射, 进一步地, 是一个同胚.

通过定理3.1.3以及定理3.1.4可以知道, $\text{Spec } A/I$ 和 $\text{Spec } S^{-1}A$ 都可以看作是 $\text{Spec } A$ 的子集, 那么 Zariski 拓扑在这两个子集上是怎么样的, 下面这个定理告诉了我们答案.

定理 3.2.3 设 A 是一个环, $I \subset A$ 是 A 的理想. $S \subset A$ 是 A 中的一个 *multiplicative subset*.

1. 对于商环的 *spectrum*, $\text{Spec } A/I$, 它是 $\text{Spec } A$ 中的闭集.
2. 如果直接赋予 $\text{Spec } A/I$ 以 Zariski 拓扑, 那么它会是 $\text{Spec } A$ 的一个子拓扑.
3. 如果 $S = \{1, f, f^2, \dots\}$. 那么 $\text{Spec } S^{-1}A$ 会是 $\text{Spec } A$ 中的开子集.
4. 如果赋予 $\text{Spec } S^{-1}A$ 以 Zariski 拓扑, 那么它也会是 $\text{Spec } A$ 的一个子拓扑.

证明 1. 由定理3.1.3有一一对应

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A/I\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : I \subset \mathfrak{p}\}.$$

所以存在一一对应

$$\text{Spec } A/I \longleftrightarrow V(I).$$

故 $\text{Spec } A/I$ 自然是 $\text{Spec } A$ 中的一个闭集.

2. 设 $S \subset A/I$. 那么 $\text{Spec } A/I$ 中的闭集具有形式 $V(S)$. 考虑 canonical 映射 $\phi : A \rightarrow A/I$. 那么存在 $\phi^{-1}(S) \subset A$. 故有一一对应

$$V(S) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A/I : S \subset \mathfrak{p}\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A : I \subset \mathfrak{p}', \phi^{-1}(S) \subset \mathfrak{p}'\} = V(I) \cap V(\phi^{-1}(S)) = \text{Spec } A/I \cap V(\phi^{-1}(S)).$$

故如果 $\text{Spec } A/I$ 有 Zariski 拓扑结构, 那么它会是 $\text{Spec } A$ 的子拓扑.

3. 当 $S = \{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$ 时, 由**定理 3.1.4**, 存在一一对应

$$\mathrm{Spec} S^{-1}A \longleftrightarrow \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : f^n \notin \mathfrak{p}, n \in \mathbb{N}\}.$$

那么其补集就是 $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : \exists n \in \mathbb{N}, f^n \in \mathfrak{p}\}$ 那么找到最小的 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f^m \in \mathfrak{p}$. 那么 Abel 预层构成的范畴是一个 additive 范畴

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} B : \exists n \in \mathbb{N} f^n \in \mathfrak{p}\} = V((f^m))$$

说明了 $\mathrm{Spec} S^{-1}B$ 是开集.

4. 设集合 $W \subset S^{-1}B$, 那么由**定理 3.1.4**可知 $\mathrm{Spec} S^{-1}B$ 中的闭集有如下一一对应

$$V(W) = \{p \in \mathrm{Spec} S^{-1}B : W \subset \mathfrak{p}\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{p}' \in \mathrm{Spec} B : \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset, \phi^{-1}(W) \subset \mathfrak{p}'\} = \mathrm{Spec} S^{-1}B \cap V(\phi^{-1}(W)),$$

其中 $\phi : B \rightarrow S^{-1}B$ 为 canonical map. 因此 $\mathrm{Spec} S^{-1}B$ 如果具有 Zariski 拓扑结构, 那么它是 $\mathrm{Spec} B$ 的子拓扑. $\square$

注 3.2.3 上述定理中的第 3 条并不是对于任意的 *multiplicative subset* S 成立. 比如取 $A = \mathbb{Z}$ 那么 $\mathrm{Spec} \mathbb{Z} = \{(p) : p \text{ is prime}\}$. 那么

$$V(I) = V((n)) = \{(p) : (n) \subset (p)\}.$$

即我们有 $p|n$. 如果 $n = 0$, 那么 $V((n)) = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}$. 它是 $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ 中的闭集. 故 $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ 中的闭集只有两种形式: 有限多个 (p) 所构成的集合以及整个空间. 但是我们无法找到某个子集使得该子集的 *vanishing set* 为 (0) . 所以 (0) 既不是开集也不是闭集, 但是它在 $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ 中. 类似的 $\mathrm{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ 也是非开非闭得. 所以 $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ 无法形成 *Zariski* 拓扑.

类似地, $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[x, y]_{(x, y)} = \mathrm{Spec}[\mathbb{C}[x, y] \setminus (x, y)]^{-1} \mathbb{C}[x, y]$ 也无法构成 *Zariski* 拓扑.

特别地, 如果 I 是 *nilpotent* 的, 那么双射 $\mathrm{Spec} A/I \rightarrow \mathrm{Spec} A$ 是一个同胚.

定理 3.2.4 设 A 是环, $I \subset A$ 是理想. 那么 f 作用在 $V(I)$ 中的点上为 0, 当且仅当 $f \in \sqrt{I}$.

证明 设 $\mathfrak{p} \in V(I)$ 秒如果 $f \pmod{\mathfrak{p}} = 0$. 这意味着 $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A, I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$. 如果 $f \in \sqrt{I}$, 那么显然 $f \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A, I \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$, 即对于任意 $\mathfrak{p} \in V(I)$, $f \pmod{\mathfrak{p}} = 0$. $\square$

3.3 A base of the Zariski topology on Spec A: Distinguished open sets

定义 3.3.1 设 A 是一个环, 再设 $f \in A$, 我们定义 *distinguished open set* 为

$$D(f) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : f(\mathfrak{p}) \neq 0\}.$$

例 3.3.1 由定义可知: $D(f) = \emptyset$ 当且仅当对于任意的 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A$, 都有 $f \in \mathfrak{p}$, 而这当且仅当 $f \in \mathcal{N}(A)$.

定理 3.3.1 设 A 是环, 那么对于任意 $S \subset A$, $V(S)$ 的补集 $V(S)^c$ 为一些 *distinguished open sets* 的并. 即 $V(S) = \bigcup_{f \in S} D(f)$. 并且 *distinguished sets* 可以构成 $\mathrm{Spec} A$ 上的一个基.

证明 设 $\mathfrak{p}_0 \in V(S)^c = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : S \not\subset \mathfrak{p}\}$. 那么存在 $f \in S$ 使得 $f \notin \mathfrak{p}_0$. 那么 $\mathfrak{p}_0 \in D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}\}$. 这说明 $V(S)^c \subset \bigcup_{f \in S} D(f)$. 再设 $\mathfrak{p}_1 \in \bigcup_{f \in S} D(f)$. 那么存在 $f \in S$ 满足 $f \notin \mathfrak{p}_1$. 这意味着 $\mathfrak{p}_1 \in \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} A : S \not\subset \mathfrak{p}\} = V(S)^c$, 即 $\bigcup_{f \in S} D(f) \subset V(S)^c$. 故 $V(S)^c = \bigcup_{f \in S} D(f)$.

由于 $\{D(f) : f \in S\} \subset \{V(S)^c : S \subset A\}$, 那么 $\{D(f) : f \in S\}$ 是 Zariski 拓扑, $\mathrm{Spec} A$ 上的一个基. $\square$

接下来考察基的一些性质.

引理 3.3.1 设 A 是环, $f_i \in A$, 其中指标 i 遍历某个指标集 J . 那么 $\bigcup_{i \in J} D(f_i) = \text{Spec } A$ 当且仅当 $(\{f_i\}_{i \in J}) = A$, 或者只有有限多个非零项使得 $\sum_{i \in J} a_i f_i = 1$.

证明 如果 $(\{f_i\}_{i \in J}) = A$. 设 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$. 由于素理想都是真子集, 这说明存在 $f_i, i \in J$ 使得 $f_i \notin \mathfrak{p}$. 这说明 $\mathfrak{p} \in D(f_i) \subset \bigcup_{i \in J} D(f_i)$. 由于 $D(f_i) \subset \text{Spec } A$, 自然地我们有 $\bigcup_{i \in J} D(f_i) \subset \text{Spec } A$, 故 $\bigcup_{i \in J} D(f_i) = \text{Spec } A$.

如果 $\bigcup_{i \in J} D(f_i) = \text{Spec } A$. 假设 $(\{f_i\}_{i \in J}) \neq A$, 由 Zorn lemma 可知存在一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $(\{f_i\}_{i \in J}) \subset \mathfrak{m}$. 那么对于任意的 $i \in J, f_i \in \mathfrak{m}$. 由于极大理想都是素理想, 由前面的假设, 存在 $f_i \notin \mathfrak{m}$, 这是矛盾的, 所以只能 $(\{f_i\}_{i \in J}) = A$. $\square$

定理 3.3.2 如果 $\text{Spec } A$ 存在一个无穷指标集 J 使得 $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in J} D(f_i)$, 那么一定可以从指标集 J 中选取有限多个指标形成一个新的指标集 $J' \subset J$ 使得 $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in J'} D(f_i)$. 换句话说, 每个 $\text{Spec } A$ 都存在一个有限基.

证明 由于 J 是无穷集, 以及 $\text{Spec } A = \bigcup_{i \in J} D(f_i)$. 那么由引理 3.3.1 可知, $(\{f_i\}_{i \in J}) = A$. 即存在有限和 $\sum_{j=1}^n a_j f_j = 1, j \in J$. 那么把这个有限和中的指标拿出来构成新的有限指标集 $J' \subset J$. 我们就得到了 $(\{f_j\}_{j \in J'}) = A$, 再由引理 3.3.1, $\text{Spec } A = \bigcup_{j \in J'} D(f_j)$. $\square$

给出一个 distinguished set 的运算性质.

性质 3.3.1 设 A 是环, 对于任意 $f, g \in A$ 有 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$.

证明 设 $\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(g) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : f \notin \mathfrak{p}, g \notin \mathfrak{p}\}$, 那么 $fg \notin \mathfrak{p}$. 故 $D(f) \cap D(g) \subset D(fg)$. 如果 $\mathfrak{p} \in D(fg) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : fg \notin \mathfrak{p}\}$, 类似地由素理想的定义可以得到 $\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(g)$. 最终 $D(f) \cap D(g) = D(fg)$. $\square$

定理 3.3.3 设 A 是环, $f, g \in A$. 那么 $D(f) \subset D(g)$ 当且仅当存在 $n \geq 1, f^n \in (g)$, 当且仅当 g 在 A_f 中是可逆的.

证明 证明第一个“当且仅当”: 假设 $D(f) \subset D(g)$. 那么对于任意 $\mathfrak{p}$ 满足 $f \notin \mathfrak{p}$, 它都满足 $g \notin \mathfrak{p}$. 那么逆否命题成立: 如果 $g \in \mathfrak{p}$, 则 $f \in \mathfrak{p}$. 即 $V(g) \subset V(f)$. 那么对于任意的 $\mathfrak{p}' \in V(g)$, 都有 $f \pmod{\mathfrak{p}'} = 0$. 由于 $\mathfrak{p}'$ 也属于 $V(f)$, 所以由 $f \in \bigcap_{(g) \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p} = \sqrt{(g)}$. 即存在 $n \geq 1, f^n \in (g)$.

如果存在 $n \geq 1, f^n \in (g)$, 这意味着 $f \in \sqrt{(g)} = \bigcap_{(g) \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p}$. 那么 f 在 $V(g)$ 中的取值都为 0, 即对于任意 $V(g)$ 中的素理想, f 都属于这个素理想. 故 $V(g) \subset V(f)$, 即 $D(f) \subset D(g)$. 到此为止, 我们得到 $f^n \in (g)$ 当且仅当 $D(f) \subset D(g)$.

现在证明第二个“当且仅当”: 假设 $f^n \in (g)$, 这意味着存在 $a \in A$ 使得 $f^n = ag$. 那么有 $\frac{ag}{1} = \frac{f^n}{1} \in A_f$. 于是 $\frac{ag}{1} \cdot \frac{1}{f^n} = 1$, 故 $\frac{g}{1} \cdot \frac{a}{f^n} = 1$, 即 g 在 A_f 中是可逆的.

假设 g 在 A_f 中可逆, 那么存在 $n \geq 1, \frac{a}{f^n} \cdot \frac{g}{1} = 1$. 所以 $\frac{ag}{1} \cdot \frac{1}{f^n} = 1$, 即 $ag = f^n$, 其实就是 $f^n \in (g)$. $\square$

注 3.3.1 从几何的角度来证明第一个充要条件: 对于 $\text{Spec } A$, 我们有 $V(g) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : (g) \subset \mathfrak{p}\}$. 对于 $\text{Spec } A/(g)$, 以及 $\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A/(g)$, 我们有一一对应:

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : (g) \subset \mathfrak{p}\} \longleftrightarrow \{\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A/(g)\}.$$

即有同构 $V(g) \cong \text{Spec } A/(g)$.

如果有 $V(g) \subset V(f)$, 那么 f 在 $\text{Spec } A/(g)$ 上的取值都是 0. 而这当且仅当 f 在 $A/(g)$ 上是 nilpotent 的, 即 $f^n \in (g)$.

3.4 Topological and Noetherian properties

我们已经在上一节中定义了 Zariski 拓扑, 那么在本节我们会介绍一些其拓扑性质, 而且会将其代数与几何进行对应联系. 此外还会介绍 Noetherian 空间以及 Noetherian 环.

3.4.1 Connectedness, irreducibility, quasicompactness

Connectedness

定义 3.4.1 (connectedness) 设 X 是一个拓扑空间, 我们称该拓扑空间是**连通的** (*connected*), 如果它不能分解成两个不相交开集的并.

有了这个定义后不禁要问, $\text{Spec } A$ 是不是连通的? 或者什么样的环, 它的 spectrum 是连通的? 请观摩下面这个定理.

定理 3.4.1 如果环 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, 那么有同胚

$$\text{Spec } A_1 \coprod \text{Spec } A_2 \coprod \cdots \coprod \text{Spec } A_n \rightarrow \text{Spec } A, \quad \text{Spec } A_i \mapsto D(f_i) \subset \text{Spec } A.$$

故 $\coprod_{i=1}^n \text{Spec } A_i \cong \text{Spec } \prod_{i=1}^n \text{Spec } A_i$.

证明 首先我们知道, 拓扑空间的 coproduct 就是拓扑空间的不交并. 那么不失一般性, 我们证明当 $n = 2$ 时, $\text{Spec}(A_1 \times A_2) \cong \text{Spec } A_1 \sqcup \text{Spec } A_2$.

假设 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_1 \times A_2)$, $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (0, 1)$. 由于 $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0) \in \mathfrak{p}$, 故 f_1 或者 f_2 其中至少有一个属于 $\mathfrak{p}$. 故 $A_1 \times 0 \subset \mathfrak{p}$. 考虑投影 $\pi : A_1 \times A_2 \rightarrow A_2$, 那么 $\pi(\mathfrak{p}) \subset A_2$. 那么对于 $ab \in \pi(\mathfrak{p})$, 我们可以找到 $t \in A_1$ 使得 $(t, ab) \in \mathfrak{p}$. 这说明 $(t, a)(1, b) \in \mathfrak{p}$, 即 (t, a) 或者 $(1, b)$ 属于 $\mathfrak{p}$. 故 $a \in \pi(\mathfrak{p})$ 或者 $b \in \pi(\mathfrak{p})$, 这意味着 $\pi(\mathfrak{p}) \in \text{Spec } A_2$. 故 $\mathfrak{p}$ 实际上等于 $A_1 \times \pi(\mathfrak{p})$. 类似地, 如果令 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A_1 \times A_2)$, 那么可以考虑投影 $\pi' : A_1 \times A_2 \rightarrow A_1$, 那么这个 $\mathfrak{p}$ 实际上等于 $\pi'(\mathfrak{p}) \times A_2$. 于是我们得到结论: $A_1 \times A_2$ 中的素理想只有 $\mathfrak{p}_1 \times A_2$, $\mathfrak{p}_1 \in \text{Spec } A_1$ 或者 $A_1 \times \mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_2 \in \text{Spec } A_2$ 两种形式.

接下来考虑映射

$$\phi : \text{Spec } A_1 \sqcup \text{Spec } A_2 \longrightarrow \text{Spec}(A_1 \times A_2), \quad \begin{cases} \mathfrak{p}_1 \mapsto \mathfrak{p}_1 \times A_2, & \mathfrak{p}_1 \in \text{Spec } A_1, \\ \mathfrak{p}_2 \mapsto A_1 \times \mathfrak{p}_2, & \mathfrak{p}_2 \in \text{Spec } A_2. \end{cases}$$

由前面的讨论我们知道 ϕ 已经是一个双射, 那么我们只需要证明它是一个同胚. 设两个映射

$$\begin{aligned} \phi_1 : \text{Spec } A_1 &\longrightarrow \{\mathfrak{p}_1 \times A_2 : \mathfrak{p}_1 \in \text{Spec } A_1\}, \\ \phi_2 : \text{Spec } A_2 &\longrightarrow \{A_1 \times \mathfrak{p}_2 : \mathfrak{p}_2 \in \text{Spec } A_2\}. \end{aligned}$$

令 $I_1 = A_1 \times 0$, $I_2 = 0 \times A_2$ 那么我们分别有同构 $A_1 \cong A/I_2$, $A_2 \cong A/I_1$. 于是我们有如下同胚:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : V(I_1) \cong \text{Spec}(A/I_1) &\longrightarrow \text{Spec}(A_1), \\ \varphi_2 : V(I_2) \cong \text{Spec}(A/I_2) &\longrightarrow \text{Spec}(A_2). \end{aligned}$$

由于 $V(I_1)$, $V(I_2)$ 都是闭集, 且 φ_1, φ_2 分别都是 ϕ_1, ϕ_2 的逆映射, 故 ϕ_1, ϕ_2 都是同胚. 由于限制 $\phi|_{\text{Spec } A_1} = \phi_1$, $\phi|_{\text{Spec } A_2} = \phi_2$, 那么由黏连定理可知 ϕ 本身就是同胚. $\square$

注 3.4.1 证明 φ_1, φ_2 是同胚还可以使用如下证法: 考虑 Spec 是从 *schemes* 所构成的范畴打到拓扑空间所构成范畴的函子. 由于 $\text{Spec}(A/I_2)$ 和 $\text{Spec}(A_1)$ 是 *schemes* 上的同构, 那么由遗忘函子可知它们自然是拓扑空间上的同胚.

这个定理就在告诉我们:

推论 3.4.1 *Zariski* 拓扑 $\text{Spec } A$ 是连通的, 当且仅当这个环 A 可以分解为有限多个环的积.

Irreducibility

定义 3.4.2 一个拓扑空间 X 是 *irreducible* 的, 如果 X 非空, 并且 X 不能分解为两个闭集的并, 或者如果 $X = Y \cup Z$, 这里 Y, Z 为 X 中的闭集, 那么就有 $X = Y$ 或者 $X = Z$. 其子集 $S \subset X$ 是 *irreducible* 的, 如果它作为子拓扑空间是 *irreducible* 的.

定理 3.4.2 如果 A 是整环, 那么 *Zariski* 拓扑 $\text{Spec } A$ 就是 *irreducible* 的.

证明 如果 $\text{Spec } A$ 是 reducible 的, 那么 $\text{Spec } A$ 可以分解为两个闭集的并, 不妨设 $\text{Spec } A = V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 I_2) = V(0)$. 这说明对于任意的 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, 有 $I_1 I_2 \subset \mathfrak{p}$, 即 $I_1 I_2 \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p} = \mathcal{N}(A)$. 这说明对于任意 $i \in I, j \in J$, 存在 $n \in \mathbb{Z}^+, (ij)^n = 0$. 但是 A 是整环, 故 i, j 中至少有一个为 0, 即 $I_1 = (0)$ 或者 $I_2 = (0)$. 故 $V(I_1) = \text{Spec } A$ 或者 $V(I_2) = \text{Spec } A$. $\square$

例 3.4.1 复平面 $\mathbb{C}^2$ 上的 *classical topology* 是 reducible 的, $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ 是 *irreducible* 的.

定义 3.4.3 (稠密集) 设 X 是拓扑空间, 称子集 $S \subset X$ *稠密*, 如果对于任意 X 的开集 U , $U \cap S \neq \emptyset$.

定理 3.4.3 1. 如果一个拓扑空间是 *irreducible* 的, 那么这个拓扑空间中的任意非空开集一定是稠密的. 这给我们一种直观体会是 *irreducible* 空间中的非空开集会“很大”, 它总会和其它任意开集交在一起.
2. 一个拓扑空间的子集不可约当且仅当它的闭包也是不可约的.
3. 一个拓扑空间如果是 *irreducible* 的, 那么它一定是连通的.

证明 首先我们统一记 X 是一个拓扑空间.

1. 这条其实是 *irreducible* 的等价定义, 暂时先不证明.
2. 设 Z 是 *irreducible* 的. 如果其闭包 $\overline{Z} = A \cup B$, 其中 A, B 是 $\overline{Z}$ 作为子拓扑空间中的闭集. 那么

$$Z = Z \cap \overline{Z} = Z \cap (A \cup B) = (Z \cap A) \cup (Z \cap B).$$

由于 $Z \cap A$ 和 $Z \cap B$ 都是 Z 作为子拓扑空间中的闭集, 并且 Z 是 *irreducible* 的, 所以要么 $Z \cap A = Z$, 要么 $Z \cap B = Z$. 不妨设 $Z \cap A = Z$, 那么有 $Z = A$ 或者 $Z \subsetneq A$. 如果 $Z = A$, 那么 Z 就是 $\overline{Z}$ 中的闭集, 即 $Z = \overline{Z}$, 那么 $\overline{Z}$ 肯定是 *irreducible* 的. 如果 $Z \subsetneq A$, 这意味着 $(Z \supset Z') \subset A$, 这里 Z' 是 Z 的导集. 那么 $\overline{Z} \subset A$, 故 $\overline{Z} = A$, 即 $\overline{Z}$ 是 *irreducible* 的.

再设 $\overline{Z}$ 是 *irreducible* 的. 如果 $Z = S \cup T$, 这里 S, T 都是 Z 作为子拓扑空间中的闭集. 那么存在 S', T' 为 X 中的闭集, 使得 $S = (Z \cap S'), T = (Z \cap T')$. 再考虑 $\overline{Z}$ 作为子拓扑空间中的闭集 $S' \cap \overline{Z}, T' \cap \overline{Z}$, 我们有

$$(S' \cap \overline{Z}) \cup (T' \cap \overline{Z}) = (S' \cup T') \cap \overline{Z},$$

$$Z \subset [(S' \cup T') \cap \overline{Z}].$$

故 $Z \subset (S' \cup T')$. 由于 $S' \cup T'$ 本身是闭集, 所以 $\overline{Z} \subset (S' \cup T')$. 这意味着

$$(S' \cup T') \cap \overline{Z} = (S' \cap \overline{Z}) \cup (T' \cap \overline{Z}) = \overline{Z}.$$

由于 $\bar{Z}$ 是 irreducible 的, 故有 $(S' \cap \bar{Z}) = \bar{Z}$ 或者 $(T' \cap \bar{Z}) = \bar{Z}$. 不妨设 $S' \cap \bar{Z} = \bar{Z}$. 那么 $\bar{Z} \subset S'$, 于是有 $S = (S' \cap Z) = Z$, 即 $T = Z$, 故 Z 是 irreducible 的.

3. 如果 irreducible 拓扑空间 X 不是连通的, 那么存在两个开集 U, V 使得 $X = U \sqcup V$. 那么 $U = V^c, V = U^c$, 于是 $X = U^c \cup V^c$, 即两个闭集的并, 故 X 是 reducible 的, 矛盾, 故 X 一定是连通的. $\square$

Quasicompactness

定义 3.4.4 称拓扑空间 X 为 *quasicompact* 的, 如果对于任意开覆盖 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, 都可以从中找到有限多个开集使得 X 被这有限多个开集所覆盖. 拓扑空间的子集是 *quasicompact* 的, 如果它作为子空间是 *quasicompact* 的.

注 3.4.2 在拓扑学中, *quasicompactness* 的定义就是 *compactness*, 但是在代数中它比 *compactness* 稍微弱一点.

定理 3.4.4 设 A 是一个环, 那么 Zariski 拓扑 $\text{Spec } A$ 是 *quasicompact* 的.

证明 定理 3.3.2 结合定义, 这个定理是显然的. $\square$

定理 3.4.5 1. 由有限多个 *quasicompact* 空间并起来得到的空间仍然是 *quasicompact* 的.

2. *Quasicompact* 空间的任意闭子集仍然是 *quasicompact* 的.

证明 1. 设 $A_1, \dots, A_n$ 为 *quasicompact* 空间, 令 $X = \bigcup_{i=1}^n A_i$. 再设 $\{U_j\}_{j \in J}$ 为 X 一个开覆盖, 那么它当然是 $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ 的开覆盖. 那么对于 A_1 , 我们可以找到 $U_{j_1}, \dots, U_{j_n}$, 构成 A_1 的有限开覆盖. 类似地, 对于 $A_2, \dots, A_n$, 我们都可以找到对应的有限开覆盖. 那么把有限多个有限开覆盖并在一起, 它还是一个有限开覆盖, 即为 X 的有限开覆盖.

2. 设 Y 是一个 *quasicompact* 空间. 再设 $F \subset Y$ 是一个闭集. 如果 $F = Y$, 那么它自然是 *quasicompact* 的. 如果 $F \neq Y$, 由于闭集都是有界的, 那么由拓扑学中的有界覆盖定理可知, F 是 *quasicompact* 的. $\square$

总结一下 Zariski 拓扑 $\text{Spec } A$ 的三个性质:

1. $\text{Spec } A$ 是连通的当且仅当 A 可以分解为有限多个环的乘积.
2. 如果 A 是整环, 那么 $\text{Spec } A$ 是 irreducible 的. 但是注意即使 A 不是整环, $\text{Spec } A$ 也可能是 irreducible 的, 比如 $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ 是 irreducible 的.
3. $\text{Spec } A$ 总是 *quasicompact* 的.

3.4.2 Possible topological properties of points of $\text{Spec } A$

前面我们已经讨论了 $\text{Spec } A$ 整个空间的三个性质, 接下来我们把目光转向 Zariski 拓扑 $\text{Spec } A$ 中具体的点.

定义 3.4.5 (Closed point) 设 X 为一个拓扑空间, 称 $p \in X$ 为该拓扑空间中的一个闭点 (*closed point*), 如果 $\{p\}$ 是一个闭集.

例 3.4.2 Classical topology $\mathbb{C}^n$ 中的所有点都是 *closed* 的, 因为 $\mathbb{C}^n$ 中单点集都是闭集. 再比如 Zariski 拓扑 $\text{Spec } \mathbb{Z} = \{p\mathbb{Z} : p \text{ 为素数}\}$. 那么对于任意非零素数 p , 由素数的不可分解性, 有 $V(q) = \{q\mathbb{Z} \in \text{Spec } \mathbb{Z} : (p) \subset q\mathbb{Z}\} = \{(p)\}$ 为闭集, 故 (p) 为 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 中的闭点. 如果 (0) 为闭点, 那么存在 $V(S) = \{(0)\}, S \subset \mathbb{Z}$. 即 $S \subset (0)$. 那么 $S = \{0\}$ 或者 $S = \emptyset$. 但是 $V(\emptyset) = V(0) = \text{Spec } \mathbb{Z}$, 这时矛盾的, 故 $\{(0)\}$ 不是闭集, 即 (0) 不是闭点. 故 $\text{Spec } \mathbb{Z}$ 中的闭点为集合 $\text{Spec } \mathbb{Z} \setminus \{(0)\}$ 中的所有点.

对于一般域 K , 其 Zariski 拓扑 $\text{Spec } K[t]$ 中, 由于 $K[t]$ 为 PID, 故素理想只有 $(f(t)), (t-a)$ 两种形式, 其中 $f(t)$ 为 $K[t]$ 中不可约多项式. 故如果存在多项式 $g(t)|f(t)$, 那么只能是 $(g(t)) = (f(t))$. 故 $V(f(t)) = \{(f(t))\}$. 同样对于 (0) , 类似地通过矛盾可以得到它也不是闭点. 故 $\text{Spec } K[t] \setminus \{(0)\}$ 中的所有点.

对于任意环的任意极大理想 $\mathfrak{m}$, 都是闭点. 假设 $\mathfrak{m}$ 是环 A 的极大理想, 那么 $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{m}\}$.

接下来给出几何上的闭点与代数上的极大理想的对应.

定理 3.4.6 设 A 是环, 则 $\text{Spec } A$ 中的闭点和 A 中的极大理想是一一对应的.

证明 设 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ 是闭点. 那么存在 $S \subset A$ 使得 $V(S) = \{\mathfrak{p}\}$. 如果 $\mathfrak{p}$ 不是极大理想, 那么我们可以找到一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 使得 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. 那么 $S \subset \mathfrak{m}$. 由于极大理想都是素理想, 所以 $V(S) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$, 与假设矛盾, 所以 $\mathfrak{p}$ 为极大理想.

再设 $\mathfrak{m}$ 为 A 的一个极大理想, 由于 $\mathfrak{m}$ 是素理想, 所以有 $V(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{m}\}$. 故 $\mathfrak{m}$ 为 $\text{Spec } A$ 中的闭点.

最后可以构造映射 $\{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ is closed point of } \text{Spec } A\} \rightarrow \max A, \mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}$, 这里 $\max A$ 为 A 中所有极大理想所构成的集合. 它显然是一个双射. $\square$

引理 3.4.1 设 K 是一个域, 如果一个 K -代数是一个有限维 K 上向量空间, 那么这个 K -代数一定是一个域.

性质 3.4.1 设 K 为一个域, A 为有限生成 K -代数. 那么由 Zariski 拓扑 $\text{Spec } A$ 中闭点所构成的集合是稠密的.

证明 证法一: 设 $f \in A$ 满足 $D(f) \neq \emptyset$, 即 f 不是 nilpotent 的, 故 A_f 不是 zero-ring. 于是可以在 A_f 中找到极大理想. 由于 A_f 中的极大理想总是形如 $\mathfrak{p}_f, f \notin \mathfrak{p} \in \text{Spec } A, f \notin \mathfrak{p}$ 的, 故直接设 $\mathfrak{p}_f$ 为 A_f 中的一个极大理想. 那么我们将要通过证明 $A/\mathfrak{p}$ 是域来证明 $\mathfrak{p}$ 就是 A 中的极大理想.

由于 $\mathfrak{p}$ 是素理想, 自然 $A/\mathfrak{p}$ 就已经是整环了. 由引理 3.4.1 可知, K -代数如果是有限维 K 上线性空间, 那么它一定是域. 故我们只需要证明 $A/\mathfrak{p}$ 为有限维 K 上线性空间 (它已经是 K -代数了).

由于 A 为有限生成 K -代数, 故存在 $a_1, \dots, a_n \in A$, 对于任意的 $a \in A$, 有 $a = k_1 a_1 + \dots + k_n a_n, k_i \in K$. 进一步地, $\frac{a}{f^m} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i a_i}{f^m}$, 故 A_f 也是有限生成 K -代数. 由于 $\mathfrak{p}_f$ 为 A_f 的极大理想, 故 $A_f/\mathfrak{p}_f$ 就是一个域, 再加上 $A_f/\mathfrak{p}_f$ 本身是有限生成 K -代数, 所以它是 K 的一个域扩张. 由 Zariski 引理 3.1.2 可知, $A_f/\mathfrak{p}_f$ 是一个有限维 K 上向量空间. 同时由于 $(A/\mathfrak{p})_f \cong A_f/\mathfrak{p}_f$, 我们得到 $(A/\mathfrak{p})_f$ 为有限维 K 上向量空间.

考虑 canonical 映射 $A/\mathfrak{p} \rightarrow (A/\mathfrak{p})_f$, 它是一个单射, 同时还是一个线性映射, 所以 $A/\mathfrak{p}$ 也是一个 K 上有限维线性空间. 此外 $A/\mathfrak{p}$ 还是一个有限生成 K -代数, 所以 $A/\mathfrak{p}$ 是一个域, 即 $\mathfrak{p}$ 是一个极大理想, 再由定理 3.4.6 可知 $\mathfrak{p}$ 它是一个闭点. 前面我们已经假设 $f \notin \mathfrak{p}$, 所以 $\mathfrak{p} \in D(f)$. 所以任意 $\text{Spec } A$ 中的开集 $D(f)$, 里面都存在闭点, 即闭点所构成的集合和任意开集的交非空, 故稠密.

证法二: 设 $f \in A$, 如果 $D(f) \neq \emptyset$ 不包含闭点, 那么对于任意的极大理想 $\mathfrak{m} \in \max A$, 它都不属于 $D(f)$, 所以 $f \in \mathfrak{m}$. 故 $f \in \bigcap_{\mathfrak{m} \in \max A} \mathfrak{m}$. 由 Hilbert 零点定理可知 $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \max A} \mathfrak{m} = \sqrt{(0)}$, 故 f 是 nilpotent 的, 故 $D(f) = \emptyset$, 矛盾. 故 $D(f)$ 必须包含闭点. $\square$

注 3.4.3 A 为有限生成代数是一个必不可少的条件, 如果没有该条件, 上述命题不再成立: 设 K 为域, 考虑局部环 $K[x]_{(x)}$, 由例 3.1.4 知它的 spectrum 为 $\text{Spec } K[x]_{(x)} = \{(0), (x)\}$. 它是一个 K -代数, 但不是有限生成的. 可以验证 (x) 为 $\text{Spec } K[x]_{(x)}$ 的闭点, 但是 $\{(0)\}$ 是开集并且不包含点 (x) . 故 $\{(x)\}$ 在 $\text{Spec } K[x]_{(x)}$ 中是不稠密的.

例 3.4.3 设 K 是一个代数闭域, $A = K[x_1, \dots, x_n]/I$ 是一个有限生成 K -代数并且 $\mathcal{N}(A) = 0$. 再设集合 $X = \text{Spec } A \subset \text{Spec } K[x_1, \dots, x_n]$. 则 X 上的函数由该集合上的闭点所决定.

证明如下: 设 f, g 为两个 X 上不同的函数. 那么 $f - g \neq 0$. 由于 $\mathcal{N}(A) = \{0\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A} \mathfrak{p} = (0)$, 所以 $f - g$ 在 X 上的任意取值不会为 0. 这说明 $D(f - g) \neq \emptyset$. 由于 A 是有限生成 K -代数, 由性质 3.4.1 可知, 它一定包含闭点, 这说明如果对于任意的 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, $f(\mathfrak{p}) = g(\mathfrak{p})$, 则 $(f - g)(\mathfrak{p}) = 0$, 故 $f - g = 0$.

定义 3.4.6 (Specialization and generization) 设 X 是一个拓扑空间, 再设 x, y 为该拓扑空间中的两个点, 如果有 $x \in \overline{\{y\}}$, 则称 x 是 y 的 *specialization*, y 是 x 的 *generization*.

例 3.4.4 考虑 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$. 点 $(y - x^2)$ 为点 $(x - 2, y - 4) = (2, 4)$ 的 *generization*, 点 $(x - 2, y - 4)$ 为 $(y - x^2)$ 的 *specialization*.

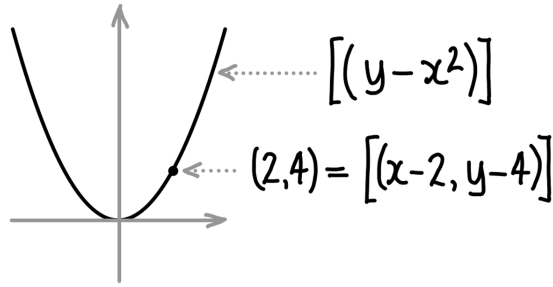


图 3.5: Generization and Specialization

定理 3.4.7 设 $X = \text{Spec } A$, 则 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的 *specialization* 当且仅当 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. 所以 $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

证明 设 $\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的 *specialization*, 那么由定义, 有 $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. 设 $S \subset X$ 满足 $S \subset \mathfrak{p}$, 那么 $\mathfrak{p} \in V(S)$, 于是 $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \subset V(S)$, 故 $\mathfrak{q} \in V(S)$, 我们有 $S \subset \mathfrak{q}$, 即 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

如果 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, 那么对于任意的 $S \subset X$, 如果 $S \subset \mathfrak{p}$ 则 $S \subset \mathfrak{q}$. 这说明如果 $\mathfrak{p} \in V(S)$, 则 $\mathfrak{q} \in V(S)$. 那么最小的包含 $\mathfrak{p}$ 的闭集 $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(F)$, 这里 F 是 X 的某个子集. 如果 $\mathfrak{p} \in V(F)$, 则 $\mathfrak{q} \in V(F)$. 我们有 $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

如果还有 $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, 那么 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, 即 $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$. 最终 $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. □

定义 3.4.7 (Generic point) 设 X 为一个拓扑空间, K 为该拓扑空间的闭集. 我们称 $p \in K$ 为 K 的 *generic point* 如果 $\overline{\{p\}} = K$.

例 3.4.5 在 $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ 中, $V(y - x^2) = \overline{\{(y - x^2)\}}$, 所以 $(y - x^2)$ 为 $V(y - x^2)$ 的 *generic point*.

前面我们提到, generic point 会在任意点附近, 接下来我们证明这一点.

定理 3.4.8 设 $X = \text{Spec } A$ 为 Zariski 拓扑, $K \subset X$ 为闭集, $\mathfrak{p}$ 为 K 的 *generic point*, 则 $\mathfrak{p}$ 会在 K 中任意一点 $\mathfrak{q}$ 的附近 (即在 $\mathfrak{q}$ 的任意邻域中), 并且不会在 $X \setminus K$ 中任意一点 $\mathfrak{r}$ 附近 (即存在 $\mathfrak{r}$ 的邻域不含点 $\mathfrak{p}$).

证明 设 $\mathfrak{q} \in K = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. 考虑 $\mathfrak{q}$ 的邻域 $U(\mathfrak{q})$. 那么 $U(\mathfrak{q})^c = V(F)$, 这里 F 为 X 的某个子集. 由定理 3.4.7, $\mathfrak{q} \in K$ 当且仅当 $\mathfrak{q} \in U(\mathfrak{q})$, 即 $F \not\subset \mathfrak{q}$, 那么 $F \not\subset \mathfrak{p}$. 故我们有 $\mathfrak{p} \in V(F)^c = U(\mathfrak{q})$.

如果 $\mathfrak{r} \notin K$, 那么 K^c 是 $\mathfrak{r}$ 的不包含 $\mathfrak{p}$ 的邻域. □

3.4.3 Irreducible and connected components, and Noetherian conditions

Irreducible and connected components

定义 3.4.8 (Irreducible and connected component) 设 X 为一个拓扑空间. 那么 X 的 *irreducible component* 指的是这个空间中极大的 *irreducible* 子集, 即该子集不会包含于更大的 *irreducible* 子集. 由于集合是 *irreducible* 的当且仅当它的闭包也是 *irreducible* 的, 所以 *irreducible components* 都是闭集.

类似地, X 的 *connected component* 指的是这个空间中极大的 *connected* 子集, 即该子集不会再包含于更大的 *connected* 子集. *Connected components* 也都是闭集.

注 3.4.4 这个定义的思想与极大理想的定义思想类似, 那么由 *Zorn lemma* 可以证明 *irreducible and connected component* 总是存在的, 而且可以不止一个.

引理 3.4.2 (Zorn's lemma) 设 φ 是一个偏序集. 再设 S 为 φ 的子集. 如果 S 中的任意序列都有上界, 则这个集合中一定存在该序关系的最大元.

Hausdorff maximal principle: 对于一个偏序集 P , 任意链 C_0 都包含在一个极大链 C 中.

定理 3.4.9 (任意拓扑空间都是 irreducible components 的并) 设 X 为一个拓扑空间, 则 X 中的任意一点 p 都一定包含于某个 X 的 *irreducible component* 之中.

证明 设 p 为 X 中的一个点, φ 为一个由 X 中包含点 p 的 *irreducible* 子集所构成的一个集合, 且以集合的包含关系作为偏序关系. 那么 $\{\overline{\{p\}}\}$ 就是一个 φ 中的全序子集. 由 Hausdorff maximal principle, 它一定包含于一个全序子集 $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$.

设 U, V 为 X 中的闭集, 且满足 $U \cup V = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha$, 那么对于任意的 $\alpha \in \Gamma$, 有

$$(U \cup V) \cap Z_\alpha = (U \cap Z_\alpha) \cup (V \cap Z_\alpha) = Z_\alpha.$$

由于 Z_α 是 *irreducible* 的, 所以我们有 $U \cap Z_\alpha = Z_\alpha$ 或者 $V \cap Z_\alpha = Z_\alpha$. 这意味着我们有

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} (U \cap Z_\alpha) = \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U \right) \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha \right) = U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha$$

或者

$$V = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha.$$

故 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha$ 是 *irreducible* 的. 这个 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} Z_\alpha$ 就是我们要找的 *irreducible component*. □

注 3.4.5 如果 $\overline{p} = F_1 \cup F_2$, 这里 F_1, F_2 为 X 的闭集, 那么 $p \in F_1$ 或者 $p \in F_2$. 由于 $\overline{\{p\}}$ 为闭包, 所以 $\overline{\{p\}} \subset F_1$ 或者 $\overline{\{p\}} \subset F_2$, 即 $\overline{\{p\}} = F_1$ 或者 $\overline{\{p\}} = F_2$.

其实 X 的任意点也包含在某个 *connected component* 之中, 而且 *connected components* 总是闭集. 所以任意拓扑空间也是 *connected components* 的并. 一个 *connected component* 是闭集的例子就是 *affine scheme* 中的 $\text{Spec}(\prod_1^\infty \mathbb{F}_2)$. 我们暂时先不给出证明.

Noetherian conditions

定义 3.4.9 (Noetherian topological space) 我们称一个拓扑空间是 *Noetherian* 的, 如果任意由闭集组成的 *descending chain* $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$ 都是稳定的, 即存在 r 使得 $Z_r = Z_{r+1} = \cdots$.

例 3.4.6 $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ 就是一个 Noetherian 空间. 事实上, 由例 3.2.4 的描述可知, $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ 中的闭集只有三种形式: 有限条曲线组成的集合、有限多个闭点组成的集合、全空间.

那么对于任意 descending chain $Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots$, 这里的 Z_i 为闭集且不是全空间, 那么 Z_i 要么是只包含有限多条曲线, 要么只包含有限多个闭点. 由有限性可知, 一定存在 $r \geq i$ 使得 $Z_i \supset Z_{i+1} \supset \cdots \supset Z_r = Z_{r+1} = \cdots$, 即 descending chain 是稳定的. 故 $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y]$ 是 Noetherian 的.

复平面 $\mathbb{C}^2$ 不是 Noetherian 的, 考虑闭集 $F_n = \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq \frac{1}{n}\}$. 那么由链 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$, 它不会稳定.

性质 3.4.2 设 X 是一个 Noetherian 空间, 那么任意非空闭集 Z 可以唯一的表示为有限多个 irreducible 闭集 $Z_1, \cdots, Z_i$ 的并, 即 $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_n$ (这里不考虑并的顺序), 并且这有限多个 irreducible 闭集是不存在包含关系的. 换句话说, Noetherian 空间中的闭集可以被分成有限多片.

证明 此证明用到的技术被称为 **Noetherian induction**. 设 $\mathcal{C}$ 为 X 的闭子集族, 并且这些闭子集是不能被有限多个 irreducible 闭集所并得到. 我们将会证明 $\mathcal{C}$ 为空集. 如果 $\mathcal{C}$ 不是空集, 那么设 $Y_1 \in \mathcal{C}$. 如果 Y_1 真包含了另一个不能被 irreducible 闭集之并所得到的闭集, 我记这个闭集为 Y_2 , 如果 Y_2 还真包含了另一个满足同样性质的闭集, 我们记它为 Y_3 . 不断重复这样的操作, 我们就会得到一条 descending chain $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots$. 由于 X 是 Noetherian 的, 所以存在一个指标 r 使得 $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$. 那么最终这个 Y_r 是不能通过有限多个 irreducible 闭集之并所得到的. 如果 Y_r 是 irreducible 的, 那么 Y_r 不会在 $\mathcal{C}$ 中, 矛盾. 如果 Y_r 不是 irreducible 的, 那么它可以分解两个真闭子集的 Y', Y'' 的并 $Y' \cup Y'' = Y_r$. 因为 Y_r 已经在 descending chain 的最末端, 即它是最小的不能被表示为有限个 irreducible 闭集的并的集合, 所以它的任意真子集如果是闭集, 则一定能分解为有限多个 irreducible 闭集的并, 即 Y', Y'' 都能被表示为有限多个 irreducible 闭集的并, 故 Y_r 能被表示为有限多个 irreducible 闭集的并, 矛盾. 故 $\mathcal{C}$ 只能是空集.

接下来我证明唯一性: 假设闭集 Z 可以被表示为两族有限多个 irreducible 闭集的并

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \cdots \cup Z_r = Z'_1 \cup Z'_2 \cup \cdots \cup Z'_s.$$

那么 $Z'_1 \subset (Z_1 \cup \cdots \cup Z_r)$, 所以 $Z'_1 = (Z'_1 \cap Z_1) \cup \cdots (Z_r \cap Z'_1)$. 由于 Z'_1 是 irreducible 的, 所以必定存在 $(Z_i \cap Z'_1) = Z'_1, 1 \leq i \leq r$. 不妨设 $(Z_1 \cap Z'_1) = Z'_1$, 那么 $Z'_1 \subset Z_1$. 类似地, 存在某个指标 a , 使得 $Z_1 \subset Z'_a$. 那么就有 $Z'_1 \subset Z_1 \subset Z'_a$. 由于这有限多个 irreducible 闭集不能出现包含关系, 所以只能 $a = 1$. 故 $Z'_1 = Z_1$. 通过反复上述步骤, 我们可以找到每个 Z_i 都等于某个 Z'_j , 故两个分解其实是相等的. $\square$

定理 3.4.10 设 X 是一个拓扑空间, 则

1. 该拓扑空间中的任意 connected component 都是 X 中 irreducible components 的并.
2. 该拓扑空间中既开又闭的子集都会是 connected components 的并.
3. 如果 X 还是 Noetherian 空间, 那么由 connected components 的任意多个子集所构成的并集在 X 中是既开又闭的.

证明 1. 设 U 为 X 中的一个 connected component. 那么对于任意点 $p \in U$, 由定理 3.4.9 可知, p 一定在某个 irreducible component 中. 取遍 U 中所有的点, 我们都可以找到对应的 irreducible component, 把这些 irreducible components 并起来, 它就是包含 U 的. 即 connected component 为 irreducible components 的并.

2. 设 F 为 X 中既开又闭的子集. 设 T_i 为一个 connected component, 则 T_i 一定有 $T_i \subset F$. 否则 $T_i \cup F$ 以及 $T_i \setminus F$ 是开集并且有 $T_i = (T_i \cap F) \cup (T_i \setminus F)$, 即 T_i 不连通. 那么取所有满足条件的 T_i , 把并起来得到 $\bigcup T_i$, 它会包含 F .

3. 首先证明, X 为有限多个 irreducible components 的并: 如果不是, 那么设 $\mathcal{C}$ 为所有不能被有限多个 irreducible components 并起来得到的闭集的集合. 由于 $X \in \mathcal{C}$, 所以 $\mathcal{C}$ 不是空集. 对于任意 $C \in \mathcal{C}$, C 不是 irreducible 的, 所以

$C = A \cup B$, 这里 A, B 都是 C 的真子集, 且为闭集. 那么 A, B 中至少也有一个不能通过有限多个 irreducible components 的并得到. 不妨设它是 A , 那么 A 也不是 irreducible 的, 故 A 也可以分解为两个闭集的并, 且其中有一个不能通过有限多个 irreducible components 的并得到. 不断重复此过程, 我们可以构造出一个不稳定的 descending chain, 这和 X 为 Noetherian 空间是矛盾的.

所以 connected components 的子集的并必定也是有限多个 irreducible components 的并. 由于 irreducible component 都是闭集, 那么它们的有限并也一定是闭集, 故 connected components 的子集的并也是闭集. 事实上它也是开集, 因为它的补集也是闭集. $\square$

Noetherian rings

定义 3.4.10 (Noetherian 环) 称环 A 是 **Noetherian 环**, 如果任意由理想组成的 *ascending chain* $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$, 都是 **稳定的**, 即存在脚标 r 使得 $I_r = I_{r+1} = \cdots$.

例 3.4.7 1. 域是 Noetherian 的, 因为它只有理想 $(0) \subset (1)$.

2. $\mathbb{Z}$ 是 Noetherian 的, 因为如果 $m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$ 相当于 $n|m$, 而任意整数只有有限多个因子, 所以任意 ascending chain 都是有限长的, 故稳定.

3. 如果 A 是 Noetherian 环, 那么对于任意 A 的理想 I , A/I 也是 Noetherian 的. 因为如果 ascending chain $I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r = I_{r+1} = \cdots$. 那么 $\cdots = A/I_{r+1} = A/I_r \subset A/I_{r-1} \subset \cdots \subset A/I_1$ 是有限长的.

4. 如果 A 是 Noetherian 环, 再设 S 为 multiplicative set, 那么 $S^{-1}A$ 也是 Noetherian 的. 因为如果存在稳定 ascending chain $I_1 \subset \cdots \subset I_r = I_{r+1} = \cdots$, 通过 canonical map $I_i \mapsto S^{-1}I_i$ 可得稳定 ascending chain $S^{-1}I_1 \subset S^{-1}I_2 \subset \cdots \subset S^{-1}I_r = S^{-1}I_{r+1} = \cdots$.

定理 3.4.11 任意 PID 都是 Noetherian 环.

证明 设 A 为 PID, 那么任意理想都为形式 $(a), a \in A$. 如果 a 是 irreducible 的, 那么这条 ascending chain 里面只有 (a) , 故稳定. 如果存在 $b|a$, 即 $(a) \subset (b)$. 重复以上步骤, 由于任意理想都包含于在某个极大理想中, 所以最终还是会得到一条稳定的 ascending chain. $\square$

总结一下: 域上或者整数集上的有限多元多项式环以及它们的商环和局部环、PID 环都是 Noetherian 环.

定理 3.4.12 设 A 为一个环, 则它是 Noetherian 的当且仅当它的任意理想是有限生成的.

证明 设 A 是 Noetherian 的, $I \subset A$ 为 A 的理想. 如果 I 不是有限生成的, 则设 $I_0 = (0), I_1 = (a_1), I_2 = (a_1, a_2), \cdots$, 其中 $a_1 \in I, a_2 \in I \setminus I_1, \cdots$. 我们就得到了一条不稳定的 ascending chain $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$, 这和 A 为 Noetherian 环矛盾. 故 I 是有限生成的.

如果 A 中的任意理想都是有限生成的. 如果存在 ascending chain $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ 是不稳定的, 那么存在 $\bigcup_i I_i$ 不是有限生成的, 即存在 $N > 0$ 使得所有的生成元都在 $\bigcup_{i=1}^N I_i$ 中, 这和有限生成矛盾, 故 ascending chain 只能是稳定的, 即 A 是 Noetherian 的. $\square$

定理 3.4.13 (Hilbert basis theorem) 如果 A 是 Noetherian 环, 那么 $A[x]$ 也是 Noetherian 环.

证明 这个证明来自: D. Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Ann. **36** (1890), 473-534.

希望通过证明任意理想 $I \subset A[x]$ 都是有限生成的来说明 $A[x]$ 是 Noetherian 的. 记 $f_1, f_2, \dots$ 为 $A[x]$ 中生成元. 如果 I 不是有限生成的, 那么存在某个 $n \geq 1, I \neq (f_1, f_2, \dots, f_n)$. 于是设 f_{n+1} 为 $I \setminus (f_1, \dots, f_n)$ 中 degree 最小的非零元素, 那么 f_1 为 I 中 degree 最小的元素, 如果 $I \neq (0)$ 的话. 如果添加 f_{n+1} 就能使 $I = (f_1, \dots, f_n, f_{n+1})$, 那么证明到此结束. 否则, 设 $a_n \in A$ 为 f_n 的系数, 这里 $n > 0$. 由于 A 是 Noetherian 的, 所以存在 N 使得 $(a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, \dots, a_N)$. 那么 $a_{N+1} = \sum_{i=1}^N b_i a_i, b_i \in A$. 那么

$$f_{N+1} - \sum_{i=1}^N b_i g_i x^{\deg f_{N+1} - \deg f_i}$$

是 I 中不在 $(f_1, \dots, f_N)$ 的元素, 并且它的 degree 小于 f_{N+1} , 这与我们 f_{N+1} 的选法矛盾. $\square$

下面这个定理将 Noetherian rings 和 Noetherian topological spaces 联系起来.

定理 3.4.14 如果环 A 是 Noetherian 的, 那么 Zariski 拓扑 $\text{Spec } A$ 就是一个 Noetherian 空间.

证明 如果 $\text{Spec } A$ 不是 Noetherian 的, 那么存在一个不稳定的 descending chain $V(S_1) \supset V(S_2) \supset \dots$. 由于 $V(S_i) = V(\sqrt{(S_i)})$, 这里 (S_i) 为由 A 的子集 S_i 所生成的理想. 所以就有 ascending chain $\sqrt{(S_1)} \subset \sqrt{(S_2)} \subset \dots$ 不是稳定的, 这和 A 是 Noetherian 环矛盾. $\square$

注 3.4.6 逆命题不一定成立, 即如果 $\text{Spec } A$ 是 Noetherian 的, A 可能不是 Noetherian 的. 比如

$$A = K[x_1, x_2, \dots] / (x_1, x_2^2, x_3^3, \dots),$$

其中 K 是域. 则 $\text{Spec } A$ 只有一个点 $(x_2, x_3^3, \dots)$, 故 $\text{Spec } A$ 是 Noetherian 的, 但是 A 本身不是 Noetherian 的.

再举一个非 Noetherian 的例子, $\text{Spec } K[x_1, x_2, \dots]$ 就不是 Noetherian 的, 因为 $V(x_1) \supset V(x_1, x_2) \supset \dots$ 不是稳定的 descending chain.

定理 3.4.15 任意 Noetherian 空间中的开集都是 quasicompact 的. 因此如果 A 是 Noetherian 环, 那么任意 $\text{Spec } A$ 中的开集都是 quasicompact 的.

For future use: Noetherian conditions for modules

定义 3.4.11 (Noetherian modules) 设 A 是一个环 (不需要是 Noetherian 的), M 为一个 A -模. 如果 A -模由任意子模所构成的 ascending chain 都是稳定的, 则称 M 为 Noetherian A -模.

定理 3.4.16 设 M 为 A -模, 则 M 是 Noetherian 的当且仅当它的任意子模都是有限生成 A -模.

证明 证明与定理 3.4.12 类似. $\square$

下面这个定理说明可以通过正和列来判断 Noetherian 模.

定理 3.4.17 设 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ 为 A -模正合列, 则 M 是 Noetherian 模当且仅当 M', M'' 都是 Noetherian 模.

证明 记 ϕ 为正合列中的映射 $M \rightarrow M''$. 那么 $\ker \phi = M'$. 设 $N \subset N' \subset M$ 满足 $N \cap M' = N' \cap M'$ 以及 $\phi(N) = \phi(N')$. 那么 $N = N'$. 事实上, 设 $x \in N' \setminus N$, 如果 $\phi(x) \notin \phi(N)$, 那么 $\phi(N) \neq \phi(N')$. 故只能有 $\phi(x) \in \phi(N)$, 那么存在 $y \in N$

使得 $\phi(x) = \phi(y)$. 所以 $(x - y) \in \ker \phi = M'$, 故 $(x - y) \in N' \cap M'$, 但是 $(x - y) \notin N$, 这使得 $N' \cap M' \neq N \cap M'$, 是矛盾的.

如果 M', M'' 是 Noetherian 的, 那么设 $\{M_i\}$ 为 M 中可以构成 ascending chain 的子模族, 于是 $\{M_i \cap M'\}$ 以及 $\{\phi(M_i)\}$ 分别是 M' 和 M'' 中可以构成 ascending chain 的子模族, 而且 chain 都是稳定的, 所以 $\{M_i\}$ 也一定是稳定的, 故 M 是 Noetherian 的.

如果 M 是 Noetherian 的, 通过正合列可知, M' 的子模也都是 M 的子模故 M' 中任意的 ascending chain 都是稳定的, 即 M' 是 Noetherian 的. 又因为 M'' 中的子模都是 M 中子模的拉回, 所以它保持序关系, 即 M'' 中的任意 ascending chain 也都是稳定的, 即 M'' 也是 Noetherian 的. $\square$

推论 3.4.2 如果 A 是 Noetherian 环, 那么 $A^{\oplus n}$ 就是 Noetherian A -模.

证明 利用归纳法, 首先 A 本身作为 A -模是 Noetherian 的. 再设 $A^{\oplus(n-1)}$ 是 Noetherian 模. 那么考虑正合列

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow A^{\oplus(n-1)} \longrightarrow 0.$$

因为 $A, A^{\oplus(n-1)}$ 都是 Noetherian 模, 那么由**定理3.4.17**可知 $A^{\oplus n}$ 也是 Noetherian 模. $\square$

推论 3.4.3 如果 A 是一个 Noetherian 环, 并且 M 是一个有限生成 A -模, 则 M 是 Noetherian 的. 那么由**定理3.4.16**可知 M 的任意 A -子模都是有限生成 A -模.

证明 设 $m_1, \dots, m_n$ 为 M 的生成元. 那么对于任意的 $m \in M$, 我们有 $a_1, \dots, a_n \in A$ 使得 $m = a_1 m_1 + \dots + a_n m_n$. 于是构造

$$\phi: A^{\otimes n} \rightarrow M, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 m_1 + \dots + a_n m_n.$$

于是我们有正合列

$$0 \longrightarrow \ker \phi \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

那么由**推论3.4.2**可知 $A^{\oplus n}$ 为 Noetherian 模, 再由**定理3.4.17**可知, M 为 Noetherian A -模. $\square$

Why you should not worry about Noetherian hypotheses

Should you work hard to eliminate Noetherian hypotheses? Should you worry about Noetherian hypotheses? Should you stay up at night thinking about non-Noetherian rings? For the most part, the answer to these questions is “no”. Most people will never need to worry about non-Noetherian rings, but there are reasons to be open to them. First, they can actually come up. For example, fibered products of Noetherian schemes over Noetherian schemes (and even fibered products of Noetherian points over Noetherian points!) can be non-Noetherian, and the normalization of Noetherian rings can be non-Noetherian. You can either work hard to show that the rings or schemes you care about don't have this pathology, or you can just relax and not worry about it. Second, there is often no harm in working with schemes in general. Knowing when Noetherian conditions are needed will help you remember why results are true, because you will have some sense of where Noetherian conditions enter into arguments. Finally, for some people, non-Noetherian rings naturally come up. For example, adeles are not Noetherian. And many valuation rings that naturally arise in arithmetic and tropical geometry are not Noetherian.

3.5 The function $I(\cdot)$, taking subset of $\text{Spec } A$ to ideals of A

前面我们以及学习了 vanishing set $V(\cdot)$, 如果把它看成一个函子的话, 可以看作是将环的理想映到 spectrum 中的子集的一个函子. 那么反过来, 我们可以定义将 spectrum 中的子集映回理想的函子,

定义 3.5.1 设 A 为一个环, 设 S 为 $\text{Spec } A$ 的子集, 那么定义

$$I(S) = \{a \in A : a \pmod{S} = 0\} = \{a \in A : a \in S = 0\},$$

即 $I(S)$ 为 $\text{Spec } A$ 中能在 S 上 *vanishing* 的函数. 换句话说 $I(S) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}$.

性质 3.5.1 设 A 为一个环, 那么

1. $I(S) \subset A$ 为 A 的一个理想.
2. 如果 $S_1 \subset S_2 \subset \text{Spec } A$, 那么 $I(S_2) \subset I(S_1)$.
3. $I(\overline{S}) = I(S)$.

证明 1. 设 $f \in I(S)$, 那么对于任意的 $\mathfrak{p} \in S$, 都有 $f \in \mathfrak{p}$. 那么对于任意的 $g \in A$, 有 $fg \in \mathfrak{p}$. 这说明 $fg \pmod{\mathfrak{p}} = 0$, 故 $fg \in I(S)$, 即 $I(S)$ 为 A 的理想.

2. 假设 $f \in I(S_2)$, $\mathfrak{p} \in S_1$, 那么 $\mathfrak{p} \in S_2$, 故 $f \pmod{\mathfrak{p}} = 0$, 即 $f \in I(S_1)$ 故 $I(S_2) \subset I(S_1)$.

3. 首先因为 $S \subset \overline{S}$, 所以结合上一条自然有 $I(\overline{S}) \subset I(S)$. 故只需证明 $I(S) \subset I(\overline{S})$. 假设 $f \in I(S)$, 那么对于任意 $\mathfrak{p} \in S$, 有 $f \pmod{\mathfrak{p}} = 0$, 那么 $\mathfrak{p} \in V(f)$. 这说明 $S \subset V(f)$. 由于 $\overline{S}$ 为最小的包含 S 的闭集, 所以 $S \subset \overline{S} \subset V(f)$. 最后对于任意的 $\mathfrak{p} \in \overline{S}$, 都有 $\mathfrak{p} \in V(f)$, 那么 $f \pmod{\mathfrak{p}} = 0$, 即 $f \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in \overline{S}} \mathfrak{p}$, 故 $f \in I(\overline{S})$, 于是 $I(S) \subset I(\overline{S})$. $\square$

例 3.5.1 设 K 为域, $A = K[x, y]$. 再设 $S = \{(y), (x, y-1)\}$. 那么 $I(S)$ 包含了以 $(0, 1)$ 以及 $x = 0$ 为零点的多项式. 那么如果 $f(x, y) \in I(S)$, 就有 $f(x, y) \in ((x, y-1) \cap (y))$. 由于 $(x, y-1)(y) = (xy, y(y-1)) \subset ((x, y-1) \cap (y))$. 所以 $I(S) = (xy, y(y-1))$.

$$\bullet (0,1) = [(x,y-1)]$$

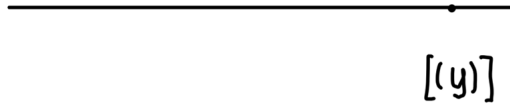


图 3.6: 集合 S

引理 3.5.1 设 $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 为一个多元多项式环, 在; 设 I, J 都是 *monomial ideals*, 那么 $I \cap J$ 的生成元为

$$\text{lcm}(m_i, n_i), \quad m_i \in I, n_i \in J.$$

例 3.5.2 考虑 $\text{Spec } \mathbb{C}[x, y, z]$, 再设 $S \subset \text{Spec } \mathbb{C}[x, y, z]$ 为三条轴的并, 即 $S = (x, y) \cup (x, z) \cup (y, z)$. 由引理 3.5.1 可知

$$I(S) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (x, xz, xy, yz) \cap (y, z) = (xy, xz, yz).$$

故 $I(S) = (xy, xz, yz)$.

定理 3.5.1 设 A 为环, 再设 $S \subset \operatorname{Spec} A$, 那么 $V(I(S)) = \bar{S}$. 所以如果 S 为闭集, 则 $V(I(S)) = S$.

证明 由于 $I(S) = \{f \in A : \forall \mathfrak{p} \in S, f \in \mathfrak{p}\}$ 所以 $V(I(S)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : f \in \mathfrak{p}\}$. 设 $f \in I(S)$, 那么对于任意的 $\mathfrak{p} \in S$, 都有 $f \in \mathfrak{p}$, 这就是说明 $S \subset V(I(S))$. 由于 $V(I(S))$ 是一个闭集, 所以 $S \subset \bar{S} \subset V(I(S))$. 假设 $\bar{S} = V(J), J \subset A$, 那么 $S \subset V(J)$, 即 $J \subset I(S)$. 这就确保了 $\bar{S} = V(J) \supset V(I(S))$, 故 $V(I(S)) = \bar{S}$. $\square$

定理 3.5.2 设 A 为环, $J \subset A$ 为理想, 则 $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

证明 $f \in I(V(J))$ 意味着 f 在 $V(J)$ 上是 vanished 的, 由 radical 的定义可知, 这当且仅当 $f \in \sqrt{J}$, 故 $I(V(J)) = \sqrt{J}$. $\square$

推论 3.5.1 $V(\cdot)$ 和 $I(\cdot)$ 给出了集合

$$\{\text{closed subset of } \operatorname{Spec} A\} \longleftrightarrow \{\text{radical ideals of } A\}$$

之间的一一对应.

注 3.5.1 这个推论其实也被称为 Hilbert 零点定理, 不过为例避免混淆, 我们不这么叫它.

例 3.5.3 设 $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1)$. 注意到 $x^2 = (x^2 + y^2 - 1) - (y - 1)(y + 1)$, 所以 $x \in I(V(J)) = \sqrt{J}$ 但是 $x \notin J$.

定理 3.5.3 设 A 为环, 则 $V(\cdot), I(\cdot)$ 给出了集合

$$\{\text{irreducible closed subset of } \operatorname{Spec} A\} \longleftrightarrow \{\text{prime ideals of } A\}$$

之间的双射. 并且由此可以得出, $\operatorname{Spec} A$ 中的点与 $\operatorname{Spec} A$ 中的 irreducible 闭集有一一对应关系. 因此 $\operatorname{Spec} A$ 中的每一个 irreducible 闭集都有一个 generic point, 即任意 $\operatorname{Spec} A$ 中的 irreducible 闭集 Z 都可以唯一的被写为 generic point 所构成的闭包 $\{\bar{z}\}, z \in \operatorname{Spec} A$.

证明 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. 那么 $I(V(\mathfrak{p})) = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$. 这说明 $V(\cdot)$ 是从 $\operatorname{Spec} A$ 到 $\operatorname{Spec} A$ 中的闭集的一个单射, 且有左逆 $I(\cdot)$. 如果 $V(\mathfrak{p}) = V(I) \cup V(J) = V(IJ)$, 且 $V(I), V(J)$ 都是 $V(\mathfrak{p})$ 的真子集, 那么 $\mathfrak{p}$ 也是 $\sqrt{I}, \sqrt{J}$ 的真子集. 由于 $\sqrt{IJ} = \mathfrak{p}$, 那么存在 $x \in \sqrt{I} \setminus \mathfrak{p}, y \in \sqrt{J} \setminus \mathfrak{p}$ 使得 $xy \in \sqrt{IJ} = \mathfrak{p}$. 那么有 $x \in \mathfrak{p}$ 或者 $y \in \mathfrak{p}$. 这与 x, y 的假设是矛盾的, 故 $V(\mathfrak{p})$ 不能分解为两个闭集的并, 即 $V(\mathfrak{p})$ 是 irreducible 的.

进一步地, $\bar{\mathfrak{p}} = V(\mathfrak{p}) = V(I(\{\mathfrak{p}\}))$ 意味着点 $\mathfrak{p}$ 被唯一的映到素理想 $\mathfrak{p}$, 且 $\mathfrak{p}$ 与 $V(\mathfrak{p})$ 是一致的. $\square$

注 3.5.2 事实上, 我们有一一对应

$$\{\text{radical ideals}\} \longleftrightarrow \{\text{closed subsets}\}.$$

定义 3.5.2 (minimal prime) 设 A 为环, 称 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ 为 *minimal prime ideal* 或 *minimal prime*, 如果它素理想的 ascending chain 中位于最左端.

例 3.5.4 环 $K[x, y]$ 中的 *minimal prime ideal* 只有 (0) .

定理 3.5.4 设 A 为一个环, 那么存在一一对应

$$\{\text{irreducible components of } \operatorname{Spec} A\} \longleftrightarrow \{\text{minimal prime ideals of } A\}.$$

特别地, $\operatorname{Spec} A$ 是 irreducible 的当且仅当 A 只有一个 *minimal prime ideal*.

证明 由定理3.5.3可知, 存在 $\text{Spec } A$ 中 irreducible close subset 与 A 中 prime ideals 之间的双射. 由于 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ 当且仅当 $V(\mathfrak{p}) \supset V(\mathfrak{q})$. 因此如果 $\mathfrak{p}$ 是 minimal prime, 那么 $V(\mathfrak{p})$ 就是 maximal 的.

那么 $\text{Spec } A$ 是 irreducible 的当且仅当 $V(0)$ 是 maximal 的, 当且仅当存在某个 $\mathfrak{p}_0$ 是 minimal prime ideal, 即它是 A 中唯一的 minimal prime ideal. $\square$

推论 3.5.2 Noetherian 环只有有限多个 minimal prime ideals.

证明 设 R 是一个 Noetherian 环, 那么由定理3.4.14可知 $\text{Spec } R$ 是一个 Noetherian 空间. 那么由性质3.4.2可知 $\text{Spec } R$ 中的所有闭集都是有限多个 irreducible closed subset 的并. 结合定理3.4.9可知 $\text{Spec } R$ 中最多只有有限多个 irreducible components. 最后结合定理3.5.4的一一对应可知 A 中最多只有有限多个 minimal prime ideals. $\square$

例 3.5.5 设 K 为一个域, 我们来寻找 $K[x, y]/(xy)$ 中的 minimal prime ideals.

由于 $K[x, y]/(xy)$ 的素理想与 $K[x, y]$ 中包含 (xy) 的素理想一一对应, 故 $K[x, y]/(xy)$ 中的素理想与 $K[x, y]$ 中包含 x 或者 y 的素理想一一对应, 于是我们有同构

$$K[x, y]/(y) \cong K[x], \quad K[x, y]/(x) \cong K[y].$$

包含 x 或者 y 的素理想中, 极大理想显然是 (x, y) , 因此我们有同构

$$\text{Spec } K[x, y]/(xy) \cong \text{Spec } K[x] \cup_{(0,0)} \text{Spec } K[y],$$

即两条“曲线”在 (x, y) 上相等. 那么 $K[x, y]/(xy)$ 的最小多项式只有以下几种可能: 如果 $\mathfrak{p}$ 包含 x , 那么 $\mathfrak{p}$ 在 $K[x, y]/(x) \cong K[y]$ 中的像包含唯一的 minimal prime ideal 为 $(0) \subset K[y]$, 这对应于 $(x) \subset K[x, y]$. 类似地, 如果 $\mathfrak{p}$ 包含 y , 那么 $\mathfrak{p}$ 在 $K[x, y]/(y)$ 中的像唯一包含 minimal prime ideal 为 $(0) \subset K[x]$, 这对应于 $(y) \subset K[x, y]$. 这说明 $K[x, y]/(xy)$ 中只有两个 minimal prime ideals, 它们分别为 $(x), (y)$.

3.5.1 Beginning of a grand dictionary between algebra and geometry

我们总结前面的所有内容, 在下面列出一个表格, 以给出我们已学过的代数与几何的对应.

代数	几何	出处
环 A	affine scheme $\text{Spec } A$	定义3.1.1
$\mathfrak{p}$ 为 A 中的素理想	$\mathfrak{p}$ 为 $\text{Spec } A$ 中的点	定义3.1.1
A 中的元素 f	$\text{Spec } A$ 上的函数 f	定义3.1.1
$f \pmod{\mathfrak{p}}$	$f(\mathfrak{p})$: f 在点 $\mathfrak{p}$ 出的取值	定义3.1.1
$f \in \mathfrak{p}$	函数 f 在点 $\mathfrak{p}$ 处 vanishing	定义3.1.1
A 的 nilradical $\mathcal{N}(A) = \sqrt{(0)} = \bigcap \mathfrak{p}$	Nilradical 中的函数在每一点都 vanishing	定理3.1.7
A 中的 maximal ideal	$\text{Spec } A$ 中的 closed point; 或者由一个点所组成的 irreducible closed subset	定理3.4.6
$\mathfrak{p}$ 为 A 中的素理想	$\text{Spec } A$ 中的 irreducible close subset $V(\mathfrak{p})$	定理3.5.3
A 中的 minimal prime ideal	$\text{Spec } A$ 中的 irreducible component	定理3.5.4
A 中的 radical ideal $I = \sqrt{I} = I(S)$	$\text{Spec } A$ 中的闭集 $S = V(I)$.	推论3.5.1

表 3.1: 代数与几何的对应

3.6 The structure sheaf

定义 3.6.1 (Structure sheaf) 设 A 是环, $f \in A$, 再设 *multiplicative subset* S 为由所有除了在 $V(f)$ 以外没有零点的函数所构成的集合 (即如果 $s \in S$, 则 $V(s) \subset V(f)$ 或者 $D(f) \subset D(s)$), 记 *localization* $S^{-1}A$ 为 $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))$. 如果 $D(f) \subset D(f')$, 则它关于

$$\text{res}_{D(f'), D(f)} : \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f')) \longrightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))$$

可以构成一个 *sheaf of rings* $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$, 我们称它为 **structure sheaf**.

定理 3.6.1 有自然同构 $A_f \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))$.

证明 首先我们写出

$$S^{-1}A = \mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f)) = \left\{ \frac{a}{s} : a \in A, s \in A \text{ 且 } s \text{ 在 } V(f) \text{ 以外没有零点} \right\} = \left\{ \frac{a}{s} : a \in A, D(f) \subset D(s) \right\}.$$

由定理 3.3.3 可知

$$\left\{ \frac{a}{s} : a \in A, D(f) \subset D(s) \right\} = \left\{ \frac{a}{s} : a \in A, s \text{ 在 } A_f \text{ 中可逆} \right\}.$$

构造嵌入 $\varphi : A \hookrightarrow A_f$, 由于 $\varphi(\{f^m\}_{m=0}^{+\infty}) \subset A_f^*$, 这里 A_f^* 是由 A_f 中所有可逆元构成的集合, 那么有交换图

$$\begin{array}{ccc} & & S^{-1}A \\ & \nearrow & \downarrow \text{A} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A_f \\ & \downarrow & \nwarrow \\ & S^{-1}A & \end{array}$$

图中 $A \rightarrow S^{-1}A$ 为 canonical map, 那么已知 $\varphi : A \rightarrow A_f$, 那么由 localization 的泛性质可得 $S^{-1}A$ 与 A_f 之间存在唯一的映射, 且映射的合成可以为恒等映射, 故 $S^{-1}A$ 与 A_f 之间存在同构, 即为 $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f)) \cong A_f$. $\square$

定义 3.6.2 ($\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -模) 设 A 为一个环, M 为一个 A -模. 再设 S 为所有在 $V(f)$ 以外没有零点的函数所构成的 *multiplicative subset*. 那么记 $S^{-1}M$ 为 $\tilde{M}(D(f))$, 这里 $f \in A$. 它关于

$$\text{res}_{D(f), D(f)} : \tilde{M}(D(f)) \rightarrow \tilde{M}(D(g))$$

可以构成一个 *sheaf*, 我们称为 $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -模.

注 3.6.1 类似地我们可以证明, $\tilde{M}(D(f)) \cong M_f$, 以及 $\tilde{M}(D(f))$ 为 $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}(D(f))$ -模. 此外 $\tilde{M}$ 也是 $\text{Spec } A$ 上的 *sheaf*.